



UNIVERSIDAD ESTATAL DE MILAGRO
VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS
CON MENCIÓN EN MODELACIÓN MATEMÁTICA

Tema:

UTILIZACIÓN DE NORMAS VECTORIALES Y MATRICIALES COMO
MÉTRICAS EN LA EVALUACIÓN DEL DESEMPEÑO DE SISTEMAS DE
CONTROL DE PROCESOS MULTIVARIABLES

AUTOR:

Ing. Janina Hellen Gutiérrez Molina.

Director TFM:

Ing. Arístides Reyes Bacardi MSc.

Milagro, septiembre de 2022

ECUADOR

ACEPTACIÓN DEL TUTOR

Yo, **Ing. Arístides Reyes Bacardi MSc** en mi calidad de director del trabajo de titulación, elaborado por **Janina Hellen Gutiérrez Molina**, cuyo tema es “**Utilización de normas vectoriales y matriciales como métricas en la evaluación del desempeño de sistemas de control de procesos multivariantes**”, que aporta a la Línea de Investigación **Desarrollo productivo**, previo a la obtención del Grado de **Magíster en Matemática** con Mención en Modelación Matemática.

Por la presente hago constar que he analizado el proyecto de grado presentado por el **Ing. Janina Hellen Gutiérrez Molina**, para optar al título de **Magister en Matemática** y que acepto tutoriar al estudiante, durante la etapa del desarrollo del trabajo hasta su presentación, evaluación y sustentación.

Milagro, 1 de septiembre del 2021.



Firmado electrónicamente por:

**ARISTIDES
REYES**

Msc. Arístides Reyes Bacardi
Cédula: 0956636336

Nombre: Ing. Aristides Reyes Bacardi MCs..

Cédula: 0956636336

DECLARACIÓN DE AUTORÍA DE LA INVESTIGACIÓN.

El autor de esta investigación declara ante el Comité Académico del Programa de Maestría en Matemática de la Universidad Estatal de Milagro, que el trabajo presentado es de mi propia autoría, no contiene material escrito de otra persona, salvo el que está referenciado debidamente en el texto; parte del presente documento o en su totalidad no ha sido aceptado para el otorgamiento de cualquier otro Título de una institución nacional o extranjera.

Milagro, a los 2 días del mes de septiembre del 2022 .



NOMBRE: ING. Janina Hellen Gutierrez Molina

CÉDULA: 0925220998

VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO CERTIFICACIÓN DE LA DEFENSA

El TRIBUNAL CALIFICADOR previo a la obtención del título de **MAGÍSTER EN MATEMÁTICA CON MENCIÓN MODELACIÓN MATEMÁTICA**, otorga al presente proyecto de investigación en las siguientes calificaciones:

TRABAJO DE TITULACION	51.33
DEFENSA ORAL	35.67
PROMEDIO	87.00
EQUIVALENTE	Muy Bueno



firmas electrónicas por:
BYRON RAMIRO
ROMERO ROMERO

Msc. ROMERO ROMERO BYRON RAMIRO
PRESIDENTE/A DEL TRIBUNAL



firmas electrónicas por:
MANUEL ANDRES
AVILES NOLES

M.P AVILES NOLES MANUEL ANDRES
VOCAL



firmas electrónicas por:
KEYLA STEFANIA
GUERRERO RUIZ

Mag. GUERRERO RUIZ KEYLA STEFANIA
SECRETARIO/A DEL TRIBUNAL

DEDICATORIA.

Este presente trabajo lo dedico a Dios en primer lugar y a mi familia, en especial a mi mamá la señora Angela Molina Macias, agradecida infinitamente con cada uno de ellos por su apoyo incondicional durante todo este proceso de formación académica.

AGRADECIMIENTO

Agradezco a Dios en primer lugar por brindarme inteligencia y sabiduría, a la vida por cada uno de los momentos de sueños y alegrías, a mi familia por estar conmigo en cada etapa de mi vida.

También a mis compañeros, amigos y colegas Flor Roso, David Dáger, Fabián Peñaherrera y en especial a mi tutor Ing. Arístides Reyes Bacardi MCs, los cuales han sido de gran apoyo en todo este camino de formación académica en la Maestría en Matemáticas, agradecida infinitamente con cada uno de ellos.

CESIÓN DE DERECHOS DE AUTOR

Sr. Dr.

Fabricio Guevara Viejo.

Rector de la Universidad Estatal de Milagro

Presente.

Mediante el presente documento, libre y voluntariamente procedo a hacer entrega de la Cesión de Derechos del Autor de Trabajo realizado como requisito previo a la obtención de mi Título de Cuarto Nivel cuyo tema fue “**Utilización de normas vectoriales y matriciales como métricas en la evaluación del desempeño de sistemas de control de procesos multivariales**”, y que corresponde al Vicerrectorado de Investigación y Postgrado.

Milagro, 2 de septiembre de 2022.



NOMBRE: ING. Janina Hellen Gutierrez Molina

CÉDULA: 0925220998

ÍNDICE GENERAL

ACEPTACIÓN DEL TUTOR.....	ii
DECLARACIÓN DE AUTORÍA DE LA INVESTIGACIÓN.	iii
VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO CERTIFICACIÓN DE LA DEFENSA.....	iv
DEDICATORIA.....	v
AGRADECIMIENTO.....	vi
CESIÓN DE DERECHOS DE AUTOR.....	vii
GLOSARIO DE TÉRMINOS.....	xii
RESUMEN.....	1
ABSTRACT.....	2
CAPÍTULO 1.....	3
EL PROBLEMA DE ESTUDIO.....	3
1.1 INTRODUCCIÓN.....	3
1.2 SITUACIÓN PROBLÉMICA.....	3
1.3 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA.....	6
1.4 OBJETIVO GENERAL.....	7
1.5 OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	7
1.6 METODOLOGÍA.....	8
1.7 ALCANCE DEL TRABAJO.....	10
CAPÍTULO 2.....	12
ESTADO DEL ARTE EN LA VALORACIÓN DEL DESEMPEÑO DE LOS SISTEMAS DE CONTROL AUTOMÁTICO.....	12
2.1 ESTADO DEL ARTE EN LA EVALUACIÓN DEL DESEMPEÑO DE LOS SISTEMAS DE CONTROL A LAZO CERRADO.....	12
2.2 MÉTODOS DE EVALUACIÓN DE LA CALIDAD DEL FUNCIONAMIENTO DE LOS SISTEMAS LINEALES A LAZO CERRADO ..	16

2.3 EVALUACIÓN DEL COMPORTAMIENTO DE LOS ÍNDICES DE MAYOR USO PARA SISTEMAS A LAZO CERRADO TÍPICOS.....	20
2.4 EVALUACIÓN DEL ÍNDICE S^2 DE LOS CASOS DE PRUEBA PARA EL SISTEMA DE SEGUNDO ORDEN	28
CAPÍTULO 3.....	31
EMPLEO DE LAS NORMAS VECTORIALES Y MATRICIALES COMO MÉTRICAS EN LA EVALUACIÓN DEL DESEMPEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL DE PROCESOS MULTIVARIABLES.....	31
3.1 NORMAS VECTORIALES.....	31
Definición Norma Vectorial	31
Definición. Espacio Lineal Normado	31
Normas p	32
3.2 NORMAS MATRICIALES.....	32
Definición. Norma Matricial (Sheldon, 2015).....	32
Definición. Norma de Frobenius (Horn & Johnson, 2013), (Laub, 2005)	33
3.2 DISCUSIÓN DE LOS MODELOS MATEMÁTICOS DE MÚLTIPLES ENTRADAS Y MÚLTIPLES SALIDAS.....	33
3.3 EMPLEO DE LAS NORMAS VECTORIALES Y MATRICIALES PARA EVALUAR EL DESEMPEÑO DE LOS MODELOS MATEMÁTICOS DE MÚLTIPLES ENTRADAS Y MÚLTIPLES SALIDAS.	36
CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....	45
Conclusiones.....	45
Recomendaciones.....	46
ANEXOS.....	47
PROGRAMAS EN CÓDIGO MATLAB EMPLEADOS EN LA TESIS	47
Programa 2.....	48
Programa 3.....	49
BIBLIOGRAFÍA	50

ÍNDICE DE FIGURA

Figura 1.1 Especificaciones para los criterios de desempeño	10
Figura 2.1 Gráficos de la respuesta temporal de un sistema a lazo cerrado incluyendo el cuadrado del error en el sistema.....	18
Figura 3.1 Suma de vectores en \mathbb{R}^2.....	31
Figura 3.4 Diagrama de simulación de la extrusora controlada en (Palacios, & Zambrano , 2020).	37
Figura 3.5 Respuestas del sistema para entradas coincidentes en tiempo.	37
Figura 3. 6 Respuestas del sistema de dos entradas no coincidentes en tiempo de aplicación.	38
Figura 3.7 Respuestas de la extrusora para evaluar el desempeño del controlador.....	39
Figura3. 8 Respuestas en el dominio del tiempo para nuevos valores de las ganancias del controlador.	40
Figura 3.9 Respuestas en el dominio del tiempo para otros valores de las ganancias.....	41
Figura 3.10 Cálculo de los índices de desempeño IAE S_1 e ISE S_2.....	42

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 2.1 Valores de la constante de tiempo resultante para lazo cerrado	22
Tabla 2.2 Índice de desempeño	29
Tabla 3.1 Datos de las mediciones para el primer experimento	39
Tabla 3.4 Valores de la norma de Frobenius.....	42
Tabla 3.5 Valores calculados de los índices de desempeño $S1$ y $S2$	43
Tabla 3.6 Tabla de índices normalizados.....	43

GLOSARIO DE TÉRMINOS

Wronskiano: El Wronskiano puede usarse para determinar si un conjunto de funciones es linealmente independiente en un intervalo dado

Norma de Frobenius La norma de Frobenius en efecto es una norma en el espacio vectorial complejo $M_{m \times n}(\mathbb{C})$.

Sistemas SISOs o MIMO: Un sistema SISO (Single Input Single Output), es una abstracción de un sistema complejo que se caracteriza por un comportamiento de “caja negra”, generando una señal de salida característica en respuesta a una señal de entrada concreta

Norma de Euclides: El espacio euclidiano es un tipo de espacio geométrico donde se satisfacen los axiomas de Euclides de la geometría.

Vectores propios: Los vectores propios son vectores multiplicados por un valor propio en las transformaciones lineales de una matriz.

Valores propios: Los valores propios son constantes que multiplican los vectores propios en las transformaciones lineales de una matriz.

RESUMEN

La evaluación del desempeño de los sistemas de control de una entrada y una salida se efectúa empleando los criterios integrales donde el integrando puede ser un producto de funciones trascendentes que modela el comportamiento oscilante del sistema al rechazar las perturbaciones. Se analizan los índices de desempeño de los sistemas a lazo cerrado en general. La complejidad analítica de resolver las integrales S_1 , S_2 , S_3 , etc., conlleva a buscar evaluadores más simples y prácticos. La complejidad en el cálculo de tales índices para los modelos de sistemas complejos se demuestra en el capítulo 2, concluyendo que, en la práctica no son adecuados, para evaluar el desempeño de los sistemas de múltiples entradas y múltiples salidas. La presente tesis tiene como Objetivo General “emplear la Norma de Frobenius en la evaluación del desempeño de sistemas de múltiples entradas y múltiples salidas que emulen a los índices de desempeño empleados en los sistemas de una entrada y una salida”. Los objetivos específicos propiciaron el cumplimiento del general. Los métodos son comparados entre sí desde los puntos de vista de su complejidad para la aplicación en Ingeniería de Control. Se seleccionaron modelos matemáticos representados en el espacio vectorial que relacionan los estados del sistema con las entradas de manera directa y con los errores de manera vectorial. Mediante Tablas, Matrices de Análisis y el cálculo de la Norma se explican los resultados de los experimentos realizados. Se concluye que la Norma de Frobenius muestra dependencia de la magnitud del vector de los errores y del tiempo que demora el sistema de ecuaciones diferenciales en restablecer el estado de equilibrio. Se propone la Norma de Frobenius para la evaluación del desempeño de los sistemas de ecuaciones diferenciales que modelan la dinámica de los procesos de múltiples entradas y múltiples salidas, la cual es muy fácil de calcular y emplear en el análisis ingeniero.

Palabras claves

Índices de desempeño, criterios integrales IAE, ITAE, ISE, ITSE, Norma de Frobenius

ABSTRACT

The control system performance evaluation of SISO systems is carried out using the integral criteria where the integrand can be a product of transcendental functions that models the oscillating behavior of the system when rejecting the disturbances. The performance indices of closed-loop systems in general are analyzed. The analytical complexity of the integrals S_1 , S_2 , S_3 , etc., leads to search for simpler and more practical evaluators. The complexity in calculating such indices for complex system models is demonstrated in chapter 2, concluding that in practice they are not suitable for evaluating the performance of MIMO systems. The present thesis has as General Objective "to use the Frobenius Norm to MIMO systems performance evaluation that emulate the performance indices used in SISO systems". The specific objectives facilitated the fulfillment of the general. The methods are compared with each other from the points of view of their complexity for the application in Control Engineering. Mathematical models represented in the vector space were selected that relate the states of the system with the inputs directly and with the errors in a vector way. Through Tables, Analysis Matrices and the norm calculation, the results of the experiments carried out are explained. It is concluded that the Frobenius Norm shows dependence on the magnitude of the error vector and the time it takes for the EDO system to restore the equilibrium state. The Frobenius Norm is proposed for evaluating the performance of EDO systems that model the dynamics of MIMO processes, which is very easy to calculate and use in engineering analysis.

Key words

Performance indices, integral criteria IAE, ITAE, ISE, ITSE, Frobenius Norm

CAPÍTULO 1

EL PROBLEMA DE ESTUDIO

1.1 INTRODUCCIÓN

Una rama de las matemáticas que resulta sumamente útil para resolver problemas de medición de distancias en los problemas de control es el Álgebra Lineal (Strang , 1980).

Los conceptos de espacios vectoriales, espacios de columnas, vectores propios, valores propios, valores singulares, matrices inversas, los wronskianos tales como las matrices de controlabilidad, de observabilidad, etc. son imprescindibles para conceptualizar matemáticamente el control de sistemas lineales representados en el espacio de estados (Sontag, 1998).

En los sistemas lineales de múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO) de orden n generalmente se emplea la valoración de su desempeño mediante la medición del error de cada variable controlada respecto de su punto de operación. Sin embargo, estos sistemas, tienen entradas y salidas vectoriales, así como un vector de error.

La valoración del desempeño de estos sistemas se realiza mediante el cálculo de integrales definidas del error vectorial o funciones trascendentes que lo involucran en cierto intervalo de tiempo. Es evidente que la solución analítica de esas integrales requiere de hábitos y habilidades que los ingenieros de control ya no tienen.

Así, se plantea la necesidad de encontrar otras vías más amigables para evaluar la calidad del desempeño de los sistemas de control sin recurrir a la solución analítica de integrales de funciones trascendentes.

1.2 SITUACIÓN PROBLÉMICA

Cualquier índice de evaluación del comportamiento del sistema controlado no es más que una medida cualitativa del desempeño del sistema (Dorf & Bishop, 2011) y se elige de tal manera que se enfatizen las especificaciones importantes del sistema.

Los Índices Analíticos de desempeño son importantes en la Ingeniería de Control, ya que a partir de ellos se han propuesto y siguen proponiéndose Metodologías de Sintonía de los Reguladores (Astrom & Hagglund , 2009). Adicionalmente con estos índices de desempeño se realiza la comparación de las bondades del funcionamiento de uno u otro regulador a lazo cerrado (Golnaraghi & Kuo, 2009).

Estos Índices Analíticos de desempeño para los sistemas de una entrada y una salida (SISO), se basan en la integral definida del error o alguna variante que lo involucre.

Ellos son (Shinners , 1998):

- Integral del cuadrado del error (Integral Square Error Criterion)

$$ISE = \int_0^T e^2(t)dt \quad ISE = \sum_{k=0}^M \frac{e^2(k)+e^2(k-1)}{2} T_s \quad (1.1)$$

- Integral del tiempo multiplicado por el cuadrado del error (Integral of Time Multiplied Square Error Criterion)

$$ITSE = \int_0^T te^2(t)dt \quad ITSE = \sum_{k=0}^M k \frac{e^2(k)+e^2(k-1)}{2} T_s \quad (1.2)$$

- Integral del valor absoluto del error (Integral Absolute Error Criterion)

$$IAE = \int_0^T |e(t)|dt \quad IAE = \sum_{k=0}^M \left| \frac{e^2(k)+e^2(k-1)}{2} \right| T_s \quad (1.3)$$

- Integral del tiempo multiplicado por el valor absoluto del error (Integral of Time Multiplied Absolute Error Criterion)

$$ITAE = \int_0^T t|e(t)|dt \quad ITAE = \sum_{k=0}^M k \left| \frac{e^2(k)+e^2(k-1)}{2} \right| T_s \quad (1.4)$$

Como se observa en el caso de los sistemas de una entrada y una salida existe una manera simple de evaluar el desempeño, sin embargo, para los sistemas de múltiples entradas y múltiples salidas el error es un vector de k componentes y la aplicación de cualquiera de estos índices es complicada. Por ejemplo, si tomamos ITAE para un vector del error en un sistema MIMO 3x3 tendríamos:

$$ITAE = \int_0^T t |[e_1(t) \ e_2(t) \ e_3(t)]^T| dt \quad (1.5)$$

Esto es la integral definida de 0 a T del producto del tiempo t por el valor absoluto del vector de los errores. Esta integración generalmente es de difícil solución analítica y se evalúa, casi siempre, mediante simulación de los procesos de control.

Por otro lado, si se emplea el formalismo de entrada/salida para representar los errores del sistema a lazo cerrado se requiere realizar un número mayor de operaciones, considerando que la función sensibilidad del sistema a lazo cerrado es la matriz inversa $S(s)$:

$$S(s) = (I + G(s)K(s))^{-1} \quad (1.6)$$

Siendo

$S(s)$ – matriz sensibilidad del sistema de múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO)

$G(s)$ – matriz de funciones de transferencias de la planta

$K(s)$ – matriz de los reguladores

s – variable de Laplace.

Y los errores en el dominio del tiempo deben ser calculados aplicando la anti transformada de Laplace. Por ejemplo, para un sistema MIMO de m salidas se tiene:

$$\begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ \vdots \\ e_m(t) \end{bmatrix} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ S(s) \begin{bmatrix} 1/s \\ 1/s \\ \vdots \\ 1/s \end{bmatrix} \right\} \quad (1.7)$$

Donde:

$1/s = \mathcal{L}\{1(t)\}$ – transformada de Laplace de la función escalón de amplitud unidad.

Dados estos inconvenientes, en la práctica ingeniera es imposible ajustar los controladores empleando la solución de tales integrales que involucran funciones trascendentes.

Las complejidades inherentes al cálculo de la integral definida de una función del vector de error $[e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n]^T$ de manera analítica serían evitables si se encuentra una métrica algebraica.

Dado que los ingenieros de control hoy en día están muy lejos de tener las habilidades y hábitos de resolver integrales para el ajuste de los parámetros de los controladores, en esta tesis se busca fundamentar un índice que permita evaluar el desempeño del sistema de manera algebraica.

Nuestra propuesta es buscar una manera más simple de evaluar el desempeño de los sistemas MIMO empleando un operador Norma, en especial la norma de Euclides para matrices cuadradas y(o) la norma de Frobenius para matrices no cuadradas, según el caso.

Si $X = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ \dots \ x_N)^T$, entonces:

$$\|X\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^N x_k^2} \text{ -- norma de Euclides o norma 2}$$

Si $M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$, la norma matricial es la norma de Frobenius

$$\|M\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 m_{ij}^2} \tag{1.8}$$

aplicándolas a matrices convenientemente formadas, con características temporales y de amplitud de las respuestas al paso escalón, las cuales pueden ser encontradas de manera analítica o mediante la base de datos creada en los sistemas SCADAS en las industrias o por simulación de los modelos.

1.3 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

En la presente tesis se busca sustituir la evaluación del desempeño del sistema mediante integrales definidas del tipo

$$ISE = \int_0^T G(t)dt \quad (1.9)$$

dónde:

$G(t)$ en (1.9) se define como una función cuadrática o en su defecto por la función valor absoluto o por una función producto que involucra al tiempo, por una norma matricial que pueda ser aplicada tanto a matrices cuadradas como a matrices rectangulares de una manera simple con fundamentación teórico práctica.

La idea a desarrollar en esta tesis es evaluar la calidad del desempeño del sistema a lazo cerrado mediante el empleo de diferentes tipos de normas como, por ejemplo, la Norma de Euclides o la Norma de Frobenius según el caso, como elegibles para dicha evaluación de los sistemas MIMO de control en presencia de perturbaciones.

1.4 OBJETIVO GENERAL

Evaluar el desempeño de sistemas de control de procesos de múltiples entradas y múltiples salidas empleando el operador Norma matricial de Frobenius emulando los índices de desempeño empleados en los sistemas de una entrada y una salida.

1.5 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Revisar la bibliografía más actual sobre el tema.
2. Estudiar y comparar los métodos de evaluación de la calidad del funcionamiento de los sistemas lineales a lazo cerrado mediante los Índices de Desempeño.
3. Seleccionar modelos de sistemas MIMO simples para las demostraciones iniciales del empleo del operador Norma de Frobenius.
4. Comparar los resultados numéricos obtenidos con los criterios integrales y los criterios propuestos.

Ya que el objetivo es evaluar, la Pregunta de Investigación en este caso es: ¿cómo se comprueba que la Norma de Frobenius aplicada a los sistemas MIMO emula los índices de desempeño de los sistemas SISO?

1.6 METODOLOGÍA

Una rama de las matemáticas que resulta sumamente útil para resolver la medición de distancias en los problemas de control es el Álgebra Lineal.

Los conceptos de espacios vectoriales, espacios de columnas, vectores propios, valores propios, valores singulares, matrices inversas, los bronskianos tales como las matrices de controlabilidad, de observabilidad, etc. son imprescindibles para conceptualizar matemáticamente el control de sistemas lineales representados en el espacio de estados.

En los sistemas lineales de orden n generalmente se emplea la valoración del desempeño de los mismos mediante la medición del error de cada variable controlada respecto de su punto de operación, o sea su distancia al valor requerido. Sin embargo, estos sistemas, modelados mediante entradas y salidas vectoriales presentan también un vector de los errores, por lo que el empleo de los criterios integrales involucra dar solución a integrales de magnitudes vectoriales que varían con el tiempo, las cuales pueden ser bien complicadas de resolver, por ejemplo, la integral de funciones matriciales del error parecidas a las dadas por (1.1), (1.2), (1.3), (1.4).

En la presente tesis se busca sustituir la evaluación del desempeño del sistema de control a lazo cerrado mediante integrales definidas por las evaluaciones matriciales y se trata de demostrar las ventajas de emplear diferentes tipos de normas matemáticas tales como la Norma de Frobenius en la valoración del desempeño de los sistemas MIMO de control en presencia de perturbaciones.

En un espacio vectorial normado Ω se define el vector de estado $X(t) \in \Omega$, $X = (x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n)^T$, mismo que está definido en el dominio del tiempo t de tal manera

que $t \in [0, t_f]$. El vector de estado desarrolla una dinámica en el tiempo dada por el sistema de ecuaciones diferenciales siguiente:

$$\begin{aligned}\dot{X}(t) &= AX(t) + Bu(t) \\ Y(t) &= CX(t) + Du(t)\end{aligned}\tag{1.10}$$

Donde

$Y(t)$ – vector de salida

A – matriz de los estados - invariante en el tiempo

B – matriz de las entradas- invariante en el tiempo

C – matriz de las salidas- invariante en el tiempo

D – matriz de transmisión directa- invariante en el tiempo

$$\dot{X}(t) = \frac{dX(t)}{dt}\tag{1.11}$$

En cierto caso particular, de tiempo discreto la variable tiempo queda definida como sigue:

$t = kT_m$ $k \in \mathbb{N}$; T_m – tiempo de muestreo del proceso continuo.

El sistema (1.10) se supone estable, por lo cual la parte real de los valores propios de A satisface la desigualdad $R_e\{\alpha\} < 0$ con estabilidad asintótica. Además, para el sistema (1.10) se define la controlabilidad y observabilidad completas de estado mediante las matrices:

$\mathcal{C} = [B \ AB \ A^2B \ A^3B \ \dots \ A^nB]$ – matriz de controlabilidad

El sistema es totalmente controlable si se verifica que $\text{rank } \mathcal{C} = n$

$\mathcal{O} = [C \ CB \ C^2B \ C^3B \ \dots \ C^nB]^T$ – matriz de observabilidad

El sistema es totalmente observable si se verifica que $\text{rank } \mathcal{O} = n$

En lo que sigue se supone que la matriz de transmisión directa es nula, o sea las entradas no pasan directamente a las salidas.

Considerando que todo espacio vectorial normado (Lay , 2006) es un espacio métrico con la distancia inducida por el operador norma y asumiendo que el elemento cero del espacio vectorial es dado por un valor prefijado, el desempeño de cualquier sistema de una entrada y una salida controlado puede ser valorado por el error $e(t)$ variable con el tiempo, o en el estado estacionario o final, resultando ser $d = e(t)$.

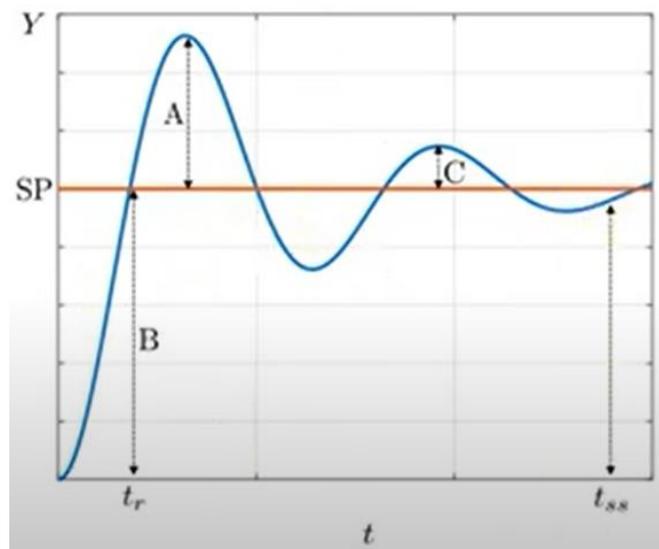
En (Ogata, 2010) también se refieren a diferentes valores de tiempos para evaluar el desempeño por rapidez de la respuesta, como son el tiempo de subida de la respuesta, el tiempo hasta el pico, el tiempo de establecimiento, etc.

Los criterios de desempeño para sistemas subamortiguados son:

- Menor sobreimpulso posible (A/B)
- Razón de declino igual a un valor predeterminado (C/A)
- Menor tiempo de subida (t_r)
- Menor tiempo de establecimiento (t_{ss})
- Mínima energía o actuación de la variable manipulada
- Utilización de un índice de desempeño para evaluar la calidad del controlador

Figura 1.1

Especificaciones para los criterios de desempeño



1.7 ALCANCE DEL TRABAJO

El trabajo de titulación debe analizar los índices de desempeño mediante los Índices Analíticos de los sistemas de control a lazo cerrado y proponer los nuevos índices algebraicos empleando las normas matriciales de Frobenius.

CAPÍTULO 2

ESTADO DEL ARTE EN LA VALORACIÓN DEL DESEMPEÑO DE LOS SISTEMAS DE CONTROL AUTOMÁTICO

2.1 ESTADO DEL ARTE EN LA EVALUACIÓN DEL DESEMPEÑO DE LOS SISTEMAS DE CONTROL A LAZO CERRADO

La intención inherente de minimizar el error en cualquier sistema de control a lazo cerrado y, por lo tanto, para realizar la medición de los errores en todo momento desde cero, hasta teóricamente, el infinito y minimizarlos continuamente como una medida de desempeño en términos de la integral del tiempo multiplicado por el valor absoluto del error (ITAE), la integral del valor absoluto del error (IAE), la integral del error (ISE) y la integral del tiempo multiplicado por el error (ITSE) están definidos.

Así, los criterios integrales de tiempo son herramientas genéricas y comprensivas para evaluar el desempeño de un sistema de control.

En la teoría del sistema de control, un índice de desempeño es una medida cuantitativa del funcionamiento de un sistema y se elige de modo que se dé énfasis a los parámetros importantes del sistema. En el artículo de (Kealy & O'Dwyer , 2003), los autores demuestran dos métodos para determinar analíticamente el valor del índice de desempeño ISE para un modelo de proceso FOPDT bajo control PI. La capacidad de los controladores proporcional/integral (PI) y proporcional/integral/derivativo (PID) para compensar la mayoría de los procesos industriales prácticos ha llevado a su amplia aceptación en aplicaciones industriales. La forma más directa de configurar los parámetros del controlador PI/PID es el uso de reglas de ajuste.

La minimización de la integral del valor absoluto del error ponderado en el tiempo (ITAE) (Martins., 2005) se conoce comúnmente como un buen índice de desempeño en el diseño de controladores PID. Como una ventaja, la búsqueda de los parámetros del controlador se puede obtener para tipos particulares de cambios en la carga y/o el punto de ajuste y como este criterio se basa en el

cálculo del error puede ser aplicado fácilmente para diferentes procesos modelados por diferentes modelos de proceso.

En el artículo (Hongqing, Long, & Zuyi , 2007), se propone el algoritmo de optimización de enjambre de partículas (PSO) con enfoque de factor de constricción (CFA) para optimizar las ganancias proporcionales-integrales-derivadas (PID) del gobernador de los generadores hidroeléctricos para pequeños transitorios hidráulicos, y el empleo para comparación de cuatro criterios de desempeño integral diferentes de la desviación de la velocidad de la turbina, como el error absoluto integral (IAE), integral del valor absoluto del error ponderado en el tiempo (ITAE), integral del error cuadrático (ISE) e integral del error cuadrático ponderado en el tiempo (ITSE), tomado como función de aptitud respectivamente, y las diferencias han sido investigadas y comparadas. Llegan a la conclusión que el desempeño dinámico del sistema regulador de los hidrogeneradores para pequeños transitorios hidráulicos es mucho mejor si se aplica el criterio ITAE como función de objetivo para la optimización.

En el artículo (Deepyaman, Acharya, , Chakraborty,, Konar, & Janarthanan, 2008) para la evaluación de la optimización de parámetros reales en diversos campos de estudio empleando el enjambre de partículas (PSO), es utilizado el criterio de error absoluto de tiempo integral (ITAE). Este artículo describe una aplicación de PSO al problema de diseñar un controlador proporcional integral derivativo de orden fraccionario ($PI^{\lambda}D^{\delta}$) cuyos parámetros comprenden la constante de proporcionalidad, la constante integral y la constante derivativa, con un orden integral (λ) y orden derivativo (δ). La presencia de cinco parámetros sujetos a optimización hace que la tarea de diseñar un controlador $PI^{\lambda}D^{\delta}$ sea más desafiante que el diseño del controlador PID convencional.

En el artículo (Wang, Yongwei, Fei, & Jianfeng, 2010) para el sistema SISO, desde la perspectiva del propósito del diseño, el diseño del controlador es un problema de optimización de múltiples objetivos, que involucra las características dinámicas y estáticas, de tiempo y frecuencia. Pero debido a la característica de desacoplamiento entre los criterios de desempeño, el efecto sobre un criterio de

desempeño inevitablemente afectará a los demás, por lo que el problema de diseño del controlador se reduce a un problema de un solo objeto que optimiza una función que refleja el desempeño integral del sistema. Para el sistema MIMO, existe la posibilidad de desacoplar entradas y salidas, entonces el problema de diseño del controlador es igual a un problema de múltiples objetos que optimiza los criterios de desempeño integrales de múltiples subsistemas desacoplados. Este documento solo analiza el sistema SISO.

En el artículo de los autores (Awouda & Mamat, 2010) se demuestra un método eficiente para ajustar los parámetros del controlador PID utilizando la regla de optimización para los criterios de desempeño de ITAE. El método implica un cálculo analítico de la ganancia del controlador (K_c), el tiempo integral (T_i) y el tiempo derivativo (T_d) para sistemas controlados con PID cuyo proceso se modela en forma de dinámica de primer orden más el retardo de tiempo (FOLPD). Primero, escriben un programa MATLAB con función objetivo para encontrar el valor óptimo para los parámetros del controlador PID que pueden lograr la mayoría de los requisitos del sistema, tales como reducir el sobreimpulso, mantener una alta respuesta del sistema, lograr un buen rechazo de perturbaciones de carga y mantener la robustez. La función objetivo se selecciona para minimizar la integral del índice de desempeño del error absoluto de tiempo (ITAE). Usando la técnica de ajuste de deseo, se manejan las ecuaciones que definen los parámetros del controlador. Se realiza una comparación entre las reglas de ajuste propuestas y las reglas de ajuste tradicionales a través del software Matlab para mostrar la eficiencia de la nueva regla de sintonía.

Una de las cuestiones más importantes en el diseño del sistema de control es garantizar la estabilidad de la planta. El controlador PID utilizado en las soluciones industriales todavía representa el controlador más común en la industria. Sin embargo, según (Atayeb & Muawia, 2014) el PID solo puede adivinar el área de estabilidad e indica la zona de estabilidad por prueba y error junto con la experiencia del diseñador. La disminución del índice de desempeño del sistema conduce a una estabilidad del sistema de control más fácil y mejor.

El error absoluto de tiempo integral (ITAE) es uno de los criterios más utilizados para reducir el error del sistema y proporcionar los mejores valores de las ganancias del PID para los requerimientos deseados del desempeño del sistema. Este documento analiza los pasos utilizados para obtener los valores adecuados de los parámetros de las ganancias del PID utilizando el criterio ITAE.

En el de (Nikhil Pathak & Bhatti Ashu, 2017) se proponen cuatro nuevos criterios de índice de desempeño (PI) para el ajuste óptimo de las ganancias del controlador de generación automática de control. El error cuadrático de la suma máxima (PSSE), el error cuadrático múltiple del tiempo de la suma máxima (PSTSE), el error absoluto de la suma máxima (PSAE) y el error absoluto múltiple del tiempo de la suma máxima (PSTAE) son los nuevos criterios del índice de desempeño que se han propuesto frente a los criterios existentes. tales como error cuadrático integral (ISE), error cuadrático múltiple de tiempo integral (ITSE), error absoluto integral (IAE) y error absoluto múltiple de tiempo integral (ITAE), respectivamente. Para demostrar la solidez de los criterios de índice de desempeño propuestos, las investigaciones se llevan a cabo para sistemas de energía térmica interconectados con y sin recalentamiento. Además, se ha investigado el desempeño dinámico de los criterios de índice de desempeño propuestos en los sistemas AGC continuos y discretos. Para testificar firmemente la superioridad de los criterios propuestos, se ha analizado el sistema AGC discreto para la amplia gama de períodos de muestreo. El estudio también revela algunos hallazgos nuevos en el sistema de control de generación automática de datos discretos.

En (Silva , Leite , Brito, & Silva, 2019) se presenta un análisis comparativo de las técnicas de ajuste de los controladores de altitud de las rampas de lanzamiento de los satélites. Las técnicas de ajuste investigadas consisten en la minimización de índices de desempeño específicos, a saber, el índice integral del error absoluto (IAE), el índice integral del error absoluto multiplicado por el tiempo (ITAE), el índice integral del error cuadrático (ISE) y el índice integral del error cuadrático multiplicado por el tiempo (ITSE), por lo que se denomina óptimo.

Mediante la definición de cifras de mérito adecuadas, relevantes para evaluar el desempeño general de los vehículos de lanzamiento de los satélites, y teniendo en cuenta también los requisitos relacionados con las limitaciones físicas de estos últimos, se compara el desempeño de los controladores de altitud sintonizados por las técnicas investigadas recientemente en el Vehículo Brasileño de Lanzamiento de Satélites (VLS), a saber, la metodología Cuadrática Lineal (LQ).

A través de los resultados de la simulación, se demuestra que, a pesar de los escasos beneficios producidos por las técnicas de ajuste alternativas, en particular ITAE e ISE, la metodología LQ sigue siendo globalmente superior.

En la monografía (Dorf & Bishop, 2011) se indica que el desempeño del sistema se puede encontrar en la literatura reciente sobre control automático. La teoría de control moderna supone que el ingeniero de sistemas puede especificar cuantitativamente el desempeño requerido del sistema, por lo que se puede calcular un índice de desempeño o medirse y utilizarse para evaluar el desempeño del sistema.

Para el funcionamiento del control adaptativo moderno de los sistemas, para la optimización automática de parámetros de un sistema de control, y para el diseño de sistemas óptimos se requiere de una medida cuantitativa del desempeño de un sistema.

En cualquier caso, cuando se requiere mejorar el diseño de un sistema o diseñar un sistema de control, se debe elegir y medir un índice de desempeño.

2.2 MÉTODOS DE EVALUACIÓN DE LA CALIDAD DEL FUNCIONAMIENTO DE LOS SISTEMAS LINEALES A LAZO CERRADO

Para comenzar a describir los criterios empleados en la práctica del diseño de sistemas a lazo cerrado se deben analizar brevemente algunos modelos típicos en el control a lazo cerrado de modelos matemáticos de procesos reales.

Los modelos típicos empleados en el diseño de sistemas a lazo cerrado son los siguientes:

Modelos de primer orden sin retardo (Astrom & Hagglund , 2009):

$$G_p(s) = \frac{K_p}{1+sT_p} \quad (2.3)$$

La minimización de la medida del desempeño garantizará la minimización del error, pero como el error también puede volverse negativo, es por eso que estas medidas de desempeño se expresan principalmente en términos de valor absoluto del error o en términos del cuadrado del error (Shinners , 1998).

Por otro lado, el criterio ISE se aplica además para desarrollar una medida de desempeño para un control óptimo, como un regulador cuadrático lineal (LQR) o un problema de control óptimo de seguimiento lineal junto con las restricciones a la entrada de control $u(t)$.

Algunos de estos errores genéricos enfatizan los errores en estado estacionario, o las aproximaciones de algunas medidas estadísticas del error, proporcionando así una mejor información sobre la calidad. A veces, al minimizar dicho error mediante el diseño del controlador, también mejoran otras cualidades, no solo el error de estado estacionario, el sobreimpulso o el tiempo de establecimiento (Shinners , 1998).

Un índice de desempeño (Dorf & Bishop, 2011) es una medida cuantitativa del funcionamiento de un sistema y se elige de modo que se dé énfasis a las especificaciones importantes del sistema.

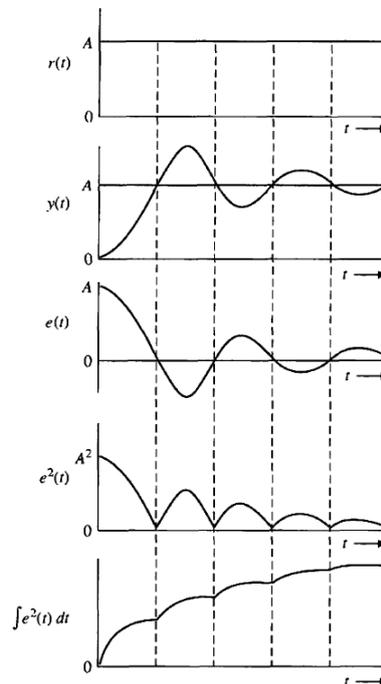
Un sistema se considera un sistema de control óptimo, (Speyer & Jacobson , 2010), cuando los parámetros del sistema son ajustados de modo que el índice alcance un extremo, comúnmente un valor mínimo. Para ser útil, un índice de desempeño debe ser un número que siempre sea positivo o cero.

Así las cosas, el mejor sistema se define como el sistema que minimiza este índice. Un índice de desempeño adecuado es la integral del cuadrado del error, ISE (Integral Square Error), que se define como (Shinners , 1998):

$$S_2 = \int_0^T e^2(t)dt \quad (2.1)$$

Figura 2.1

Gráficos de la respuesta temporal de un sistema a lazo cerrado incluyendo el cuadrado del error en el sistema.



El límite superior T es un tiempo finito que se elige arbitrariamente para que la integral

se aproxime al valor de estado estacionario. Por lo general, es conveniente elegir T como el valor del tiempo de establecimiento. El tiempo de establecimiento se define como (Ogata, 2010) el tiempo requerido para que la curva de respuesta alcance y permanezca dentro de un rango sobre el valor final del tamaño especificado por el porcentaje absoluto del valor final (generalmente 2% o 5%).

En la figura 2.1 se muestran las respuestas temporales siguientes, enumeradas de arriba hacia abajo:

- a) el paso escalón,
- b) la respuesta al paso escalón para un sistema de control a lazo cerrado
- c) el error en el sistema
- d) el cuadrado del error
- e) la integral del cuadrado del error

Este criterio discriminará entre sistemas excesivamente sobre amortiguados y excesivamente subamortiguados. El mínimo del valor de la integral ocurre para un valor de compromiso del amortiguamiento. El índice de desempeño de la ecuación 2.1 se adapta fácilmente para mediciones prácticas. Además, el error cuadrático es matemáticamente conveniente para fines analíticos y computacionales.

Un índice del desempeño bastante útil es la integral del valor absoluto del error, conocido en inglés como IAE (Integral of Absolute Magnitude of Error criterion) dado como (Shinnars , 1998):

$$S_1 = \int_0^{\infty} |e(t)| dt \quad (2.2)$$

Al emplear (2.2) para encontrar el óptimo y minimizar la magnitud del error, esta expresión integral aumenta, sin importar si el error es positivo o negativo, y da como resultado un sistema subamortiguado bastante bueno.

Para un sistema de segundo orden, S_1 tiene un mínimo para una relación de amortiguamiento de aproximadamente 0,7.

Otro índice de desempeño útil (Shinnars , 1998) es la integral del tiempo multiplicado por el valor absoluto del error conocido por sus siglas en inglés ITAE (Integral of Time multiplied by the Absolute value of Error):

$$S_3 = \int_0^{\infty} t |e(t)| dt \quad (2.3)$$

Este índice de desempeño es mucho más selectivo que los dos anteriores.

Existen otros tres índices más (Shinnars , 1998), los cuales se definen a continuación:

- a. $S_4 = \int_0^{\infty} t e^2(t) dt$ – ITSE (integral del tiempo por el cuadrado del error)
- b. $S_5 = \int_0^{\infty} t^2 |e(t)| dt$ – ISTAE (integral del cuadrado del tiempo por el valor absoluto del error)

c. $S_6 = \int_0^{\infty} t^2 e^2(t) dt$ – ISTSE (integral del cuadrado del tiempo por el cuadrado del error)

Estos tres últimos índices no han tenido un amplio uso debido al incremento en la dificultad de su manejo en la práctica industrial.

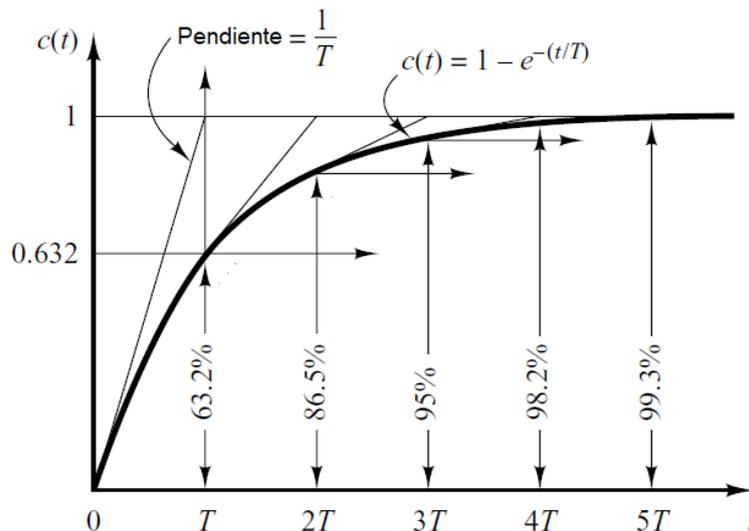
El índice ISE no es muy sensible a las variaciones de los parámetros, porque el mínimo suele ser amplio. Además, tiene la ventaja de ser fácil de manejar matemáticamente. El IAE da una sensibilidad ligeramente mejor que el criterio ISE. El índice ITAE es el más sensible de los tres y, a veces, una ligera variación de los parámetros degrada el desempeño del sistema.

2.3 EVALUACIÓN DEL COMPORTAMIENTO DE LOS ÍNDICES DE MAYOR USO PARA SISTEMAS A LAZO CERRADO TÍPICOS.

Para los sistemas a lazo cerrado que son modelados por un comportamiento de primer orden la respuesta de los cuales presenta un carácter exponencial, como se muestra en la figura y modelada por la expresión (2,4)

Figura 2.2

Respuesta en el dominio del tiempo del sistema a lazo cerrado a una señal de entrada escalón unitario (Ogata, 2010)



$$c(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (2.4)$$

la magnitud del error, $e(t)$, se puede obtener para una señal unitaria como sigue en (2.5)

$$e(t) = \mathbf{1} - c(t) \quad (2.5)$$

Entonces:

$$e(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (2.6)$$

En estos casos el índice S_1 se calcula como sigue

$$S_1 = \int_0^{t_{est}} \left| e^{-\frac{t}{\tau}} \right| dt \quad (2.7)$$

Considerando que el valor absoluto del error para una señal de prueba unitaria positiva es

$$\left| e^{-\frac{t}{\tau}} \right| = \begin{cases} e^{-\frac{t}{\tau}} & \text{si } e(t) \geq 0 \\ -e^{-\frac{t}{\tau}} & \text{si } e(t) < 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

Entonces, ya que la entrada es un paso escalón positivo es válido tomar la función para $e(t) \geq 0$. Así, sustituyendo (2.8) en (2.7):

$$S_1 = \int_0^{t_{est}} e^{-\frac{t}{\tau}} dt$$

Resolviendo la integral indefinida por cambio de variable:

$$u = -\frac{t}{\tau}$$

$$du = -\frac{dt}{\tau}$$

$$dt = -\tau du$$

Sustituyendo en la integral:

$$\int -\tau e^u du = -\tau \int e^u du = -\tau e^u + C$$

Restableciendo la variable original:

$$\int e^{-\frac{t}{\tau}} dt = -\tau e^{-\frac{t}{\tau}} + C$$

Encontrando la antiderivada y sustituyendo para la evaluación de los límites de integración, se tiene:

$$S_1 = -\tau e^{-\frac{t}{\tau}} \Big|_0^{t_{est}} = \tau \left(\mathbf{1} - e^{-\frac{t_{est}}{\tau}} \right) \quad (2.9)$$

Para determinar el valor del límite superior de (2.9) seguiremos las observaciones dadas en (Shinners , 1998), (Ogata, 2010) y (Dorf & Bishop, 2011) que establecen cómo medir el tiempo de establecimiento t_{est} la idea es determinar el instante de tiempo en el cual el valor de la respuesta entra en una región dada por el $\pm 5\%$ o $\pm 2\%$ respecto del valor final de la respuesta.

Se conoce que para $t = 4\tau$ la respuesta ya ha alcanzado el valor del 98.2% del valor final y ese valor puede ser aceptado como valor final. Este valor puede observarse en la gráfica dada en la figura 2.2.

Teóricamente el valor final de la respuesta puede ser determinado cuando el tiempo tiende a infinito, lo cual no es práctico para los ingenieros dedicados al control. Entonces se determinan diez valores consecutivos para un sistema típico de primer orden.

$$S_1 = -\tau e^{-\frac{t}{\tau}} \Big|_0^{4\tau} = \tau(1 - e^{-4}) = 0.981684\tau \quad (2.10)$$

Se calculan cinco valores del índice (2.2) para establecer una base de comparación en lo que sigue y se muestran en la Tabla 2.1

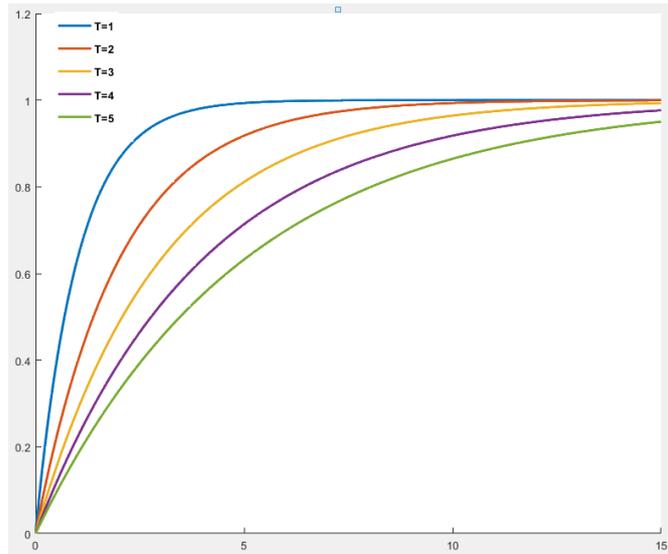
Tabla 2.1 Valores de la constante de tiempo resultante para lazo cerrado

Valores de τ	Valores de S_1
$\tau = 1$	0.981684
$\tau = 2$	1.96
$\tau = 3$	2.945
$\tau = 4$	3.926
$\tau = 5$	4.9

Las respuestas para esos valores de la constante de tiempo se muestran en la figura 2.3 y los valores respectivos de la constante de tiempo en la leyenda.

Figura 2.3.

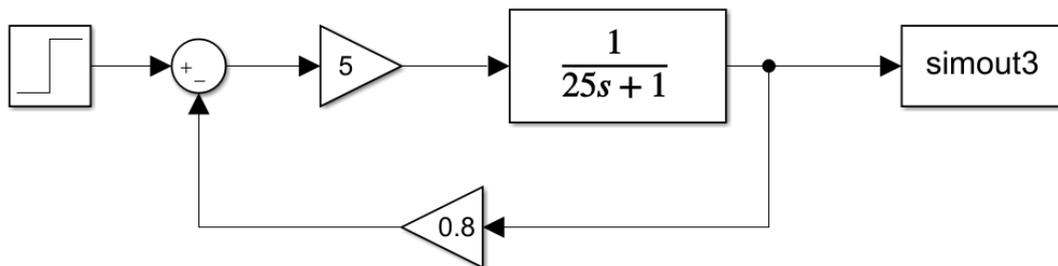
Respuestas en el dominio del tiempo para un sistema a lazo cerrado con ganancia 5 y ganancia en la realimentación de 0.8



El sistema modelado y simulado se muestra en la figura 2.4 empleando la programación orientada a bloques de Simulink.

Figura 2.4.

Diagrama Simulink para la simulación del cambio de valores de la constante de tiempo de la función de transferencia $G_p(s) = \frac{1}{Ts+1}$



El sistema a lazo cerrado presenta un comportamiento exponencial lo cual se demuestra como sigue.

Según (Dorf & Bishop, 2011), (Ogata, 2010) y otros para encontrar la función de transferencia a lazo cerrado del diagrama Simulink mostrado en la figura 2.4 se debe aplicar la expresión

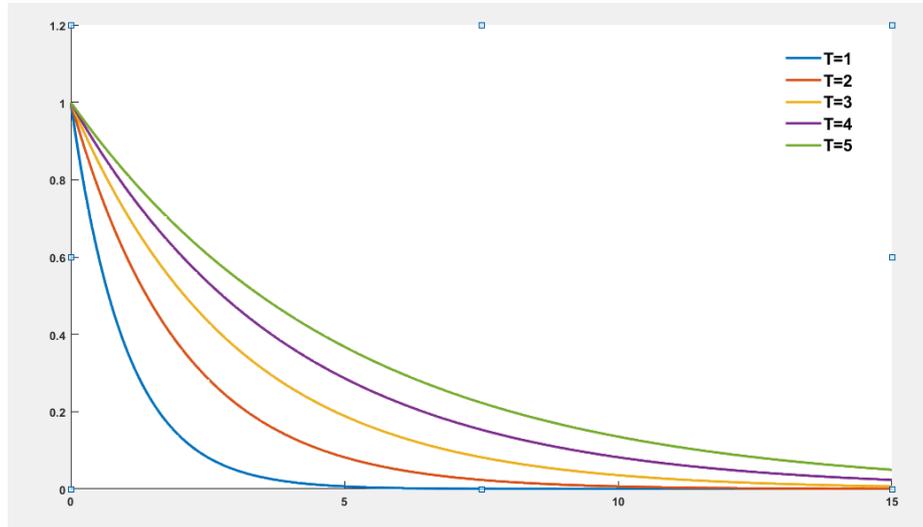
$$G_{LC}(s) = \frac{\frac{5}{25s+1}}{1 + \frac{5 \cdot 0.8}{25s+1}} = \frac{\frac{5}{25s+1}}{\frac{25s+1+5 \cdot 0.8}{25s+1}} = \frac{5}{25s+5} = \frac{1}{5s+1} \quad (2.11)$$

Que se corresponde con el último valor mostrado en la tabla para una constante de tiempo de $T = 5 \text{ seg}$. En la figura 2.5 se muestran las gráficas para el error en el sistema a lazo cerrado. Las integrales bajo estas curvas se corresponden con

el índice (2.10) aproximadamente ya que en teoría se debe integrar desde cero hasta infinito, lo cual no es práctico.

Figura 2.5.

Gráficas para el error en el sistema a lazo cerrado.



El criterio dado por S_3 para los sistemas de primer orden se calcula por la expresión (2.12)

$$S_3 = \int_0^{t_{est}} t \left| e^{-\frac{t}{\tau}} \right| dt \quad (2.12)$$

Con $e(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \forall t \geq 0$

$$S_3 = \int_0^{t_{est}} t e^{-\frac{t}{\tau}} dt \quad (2.13)$$

Cuya solución es:

$$S_3 = -\tau e^{-\frac{t}{\tau}} (t + \tau) \Big|_0^{t_{est}} = \tau^2 - \tau e^{-\frac{t_{est}}{\tau}} (t_{est} + \tau)$$

Bajo el supuesto que $t_{est} = 3\tau$

$$S_3 = \tau^2 - \tau e^{-3} (3\tau + \tau) = \tau^2 - 4e^{-3} \tau^2 = \tau^2 (1 - 4e^{-3})$$

ya que $e^{-3} = 0.049787$

$$S_3 = 0.8\tau^2 \quad (2.14)$$

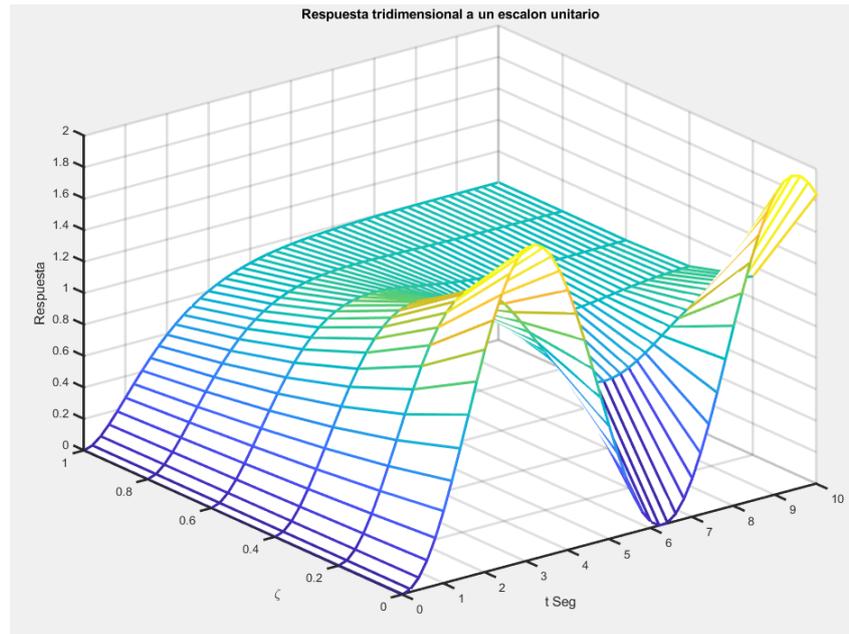
Para los sistemas de segundo orden, la respuesta en el dominio del tiempo se expresa como sigue (Ogata, 2010):

$$c(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen}(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t) \quad (2.15)$$

En la figura 2.6 se muestran las curvas de respuesta al escalón unitario en función del tiempo y de los valores de la relación de amortiguamiento ζ

Figura 2.6.

Respuestas a un escalón unitario en función de ζ



Y el error será entonces:

$$e(t) = 1 - c(t)$$

$$e(t) = 1 - \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen}(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t) \quad (2.16)$$

Este error es un error con oscilaciones amortiguadas por lo cual se debe emplear o el módulo del error o el cuadrado del error. Como este último es muy conveniente para optimizar los valores de las ganancias de los controladores se aplica el criterio dado por (2.1)

Para simplificar la expresión se sustituyen los factores que no dependen del tiempo por constantes, o sea:

$$\alpha = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (2.17)$$

$$\beta = -\zeta\omega_n \quad (2.18)$$

$$\gamma = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} \quad (2.19)$$

Y se eleva al cuadrado (2.16)

$$e^2(t) = 1 - 2\alpha e^{\beta t} \text{sen}(\gamma t) + \alpha^2 e^{2\beta t} \text{sen}^2 \gamma t \quad (2.20)$$

Integrando:

$$S_2 = \int_0^{t_{est}} [1 - 2\alpha e^{\beta t} \text{sen}(\gamma t) + \alpha^2 e^{2\beta t} \text{sen}^2 \gamma t] dt \quad (2.21)$$

$$S_2 = \int_0^{t_{est}} dt - 2\alpha \int_0^{t_{est}} e^{\beta t} \text{sen}(\gamma t) dt + \alpha^2 \int_0^{t_{est}} e^{2\beta t} \text{sen}^2(\gamma t) dt$$

Resolviendo la segunda integral por partes:

$$\int e^{\beta t} \text{sen}(\gamma t) dt = \frac{1}{\beta} e^{\beta t} \text{sen} \gamma t - \frac{\gamma}{\beta} \int e^{\beta t} \text{cos} \gamma t dt$$

$$\int e^{\beta t} \text{sen} \gamma t dt = \frac{1}{\beta} e^{\beta t} \text{sen} \gamma t - \frac{\gamma}{\beta} \left(\frac{1}{\beta} e^{\beta t} \text{cos} \gamma t + \frac{\gamma}{\beta} \int e^{\beta t} \text{sen} \gamma t dt \right)$$

$$\frac{\beta^2 + \gamma^2}{\beta^2} \int e^{\beta t} \text{sen} \gamma t dt = \frac{1}{\beta} e^{\beta t} \text{sen} \gamma t - \frac{\gamma}{\beta^2} e^{\beta t} \text{cos} \gamma t$$

$$\int_0^{t_{est}} e^{\beta t} \text{sen} \gamma t dt = \left(\frac{\beta}{\beta^2 + \gamma^2} e^{\beta t} \text{sen} \gamma t - \frac{\gamma}{\beta^2 + \gamma^2} e^{\beta t} \text{cos} \gamma t \right) \Big|_0^{t_{est}}$$

$$\int_0^{t_{est}} e^{\beta t} \text{sen} \gamma t dt = \frac{\beta}{\beta^2 + \gamma^2} e^{\beta t_{est}} \text{sen} \gamma t_{est} - \frac{\gamma}{\beta^2 + \gamma^2} e^{\beta t_{est}} \text{cos} \gamma t_{est} + \frac{\gamma}{\beta^2 + \gamma^2}$$

La tercera integral se resuelve considerando que $\text{sen}^2(\gamma t) = \frac{1 - \text{cos}(2\gamma t)}{2}$

$$\int_0^{t_{est}} e^{2\beta t} \text{sen}^2(\gamma t) dt = \int_0^{t_{est}} e^{2\beta t} \left(\frac{1 - \text{cos}(2\gamma t)}{2} \right) dt = \frac{1}{2} \int_0^{t_{est}} [e^{2\beta t} dt - e^{2\beta t} \text{cos}(2\gamma t) dt]$$

Resolviendo la integral indefinida:

$$\int e^{2\beta t} \text{sen}^2(\gamma t) dt = \frac{1}{2} \int e^{2\beta t} dt - \frac{1}{2} \int e^{2\beta t} \text{cos}(2\gamma t) dt = \frac{1}{4\beta} \int d(e^{2\beta t}) -$$

$$\frac{1}{2} \int e^{2\beta t} \text{cos}(2\gamma t) dt = \frac{1}{4\beta} e^{2\beta t} - \frac{1}{2} \int e^{2\beta t} \text{cos}(2\gamma t) dt;$$

$$= \frac{1}{4\beta} e^{2\beta t} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\beta} e^{2\beta t} \text{cos} 2\gamma t + \frac{\gamma}{\beta} \int e^{2\beta t} \text{sen}(2\gamma t) dt \right)$$

Pero:

$$\int e^{2\beta t} \text{sen}(2\gamma t) dt = \frac{\beta}{2(\beta^2 + \gamma^2)} e^{2\beta t} \text{sen}(2\gamma t) - \frac{\gamma}{\beta^2 + \gamma^2} e^{2\beta t} \text{cos}(2\gamma t)$$

Entonces:

$$\int e^{2\beta t} \text{sen}^2(\gamma t) dt = \frac{1}{4\beta} e^{2\beta t} - \frac{1}{4\beta} e^{2\beta t} \text{cos} 2\gamma t - \frac{\gamma}{2\beta} \left[\frac{\beta}{2(\beta^2 + \gamma^2)} e^{2\beta t} \text{sen}(2\gamma t) - \frac{\gamma}{\beta^2 + \gamma^2} e^{2\beta t} \text{cos}(2\gamma t) \right]$$

Finalmente:

$$S_2 = t_{est} - 2\alpha \left(\frac{\beta}{\beta^2 + \gamma^2} e^{\beta t_{est}} \text{sen} \gamma t_{est} - \frac{\gamma}{\beta^2 + \gamma^2} e^{\beta t_{est}} \text{cos} \gamma t_{est} + \frac{\gamma}{\beta^2 + \gamma^2} \right) + \alpha^2 \left\{ \frac{1}{4\beta} e^{2\beta t} - \frac{1}{4\beta} e^{2\beta t} \text{cos} 2\gamma t - \frac{\gamma}{2\beta} \left[\frac{\beta}{2(\beta^2 + \gamma^2)} e^{2\beta t} \text{sen}(2\gamma t) - \frac{\gamma}{\beta^2 + \gamma^2} e^{2\beta t} \text{cos}(2\gamma t) \right] \right\} \quad (2.22)$$

Como se puede apreciar, el cálculo de estos índices resulta engorroso incluso para formas de ondas sinusoidales.

Para evaluar la respuesta se toman cuatro casos, a saber:

- 1) $\zeta = 0.3$; $\omega_n = 1$; $t_{est} = 11.2s$
- 2) $\zeta = 0.5$; $\omega_n = 2$; $t_{est} = 4s$
- 3) $\zeta = 0.7$; $\omega_n = 4$; $t_{est} = 1.5s$

$$4) \zeta = 0.8; \omega_n = 6; t_{est} = 0.7$$

En el primer caso tendremos:

$$\alpha_1 = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0.09}} = 1.05; \beta_1 = -\zeta\omega_n = -0.3; \gamma_1 = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 0.954$$

Para los cuales $S_2 = 6.3893$

En el segundo caso:

$$\alpha_2 = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-0.25}} = 2.31; \beta_2 = -\zeta\omega_n = -1; \gamma_2 = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 1.73$$

Para los cuales $S_2 = 1.9989$

En el tercer caso tendremos los valores siguientes:

$$\alpha_3 = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{4}{\sqrt{1-0.49}} = 5.6; \beta_3 = -\zeta\omega_n = -2.8; \gamma_3 = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 2.86$$

Para los cuales $S_2 = 5.6022$

En el cuarto caso tendremos:

$$\alpha_4 = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{6}{\sqrt{1-0.64}} = 10; \beta_4 = -\zeta\omega_n = -4.8; \gamma_4 = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 3.6$$

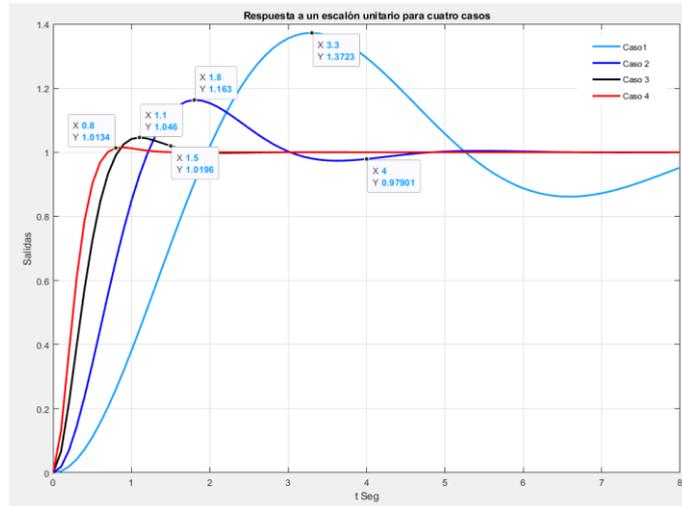
Para los cuales $S_2 = 5.6022$

En la figura 2.7 se muestran cuatro curvas de respuesta al paso escalón. Estas curvas se corresponden con los casos antes analizado. Para los casos 3 y 4 ellas se desarrollan muy cercanas una a la otra y el índice prácticamente no es sensible a los cambios en los parámetros indicados. Sin embargo, la curva 4 presenta mejor forma que la primera, pero no es reconocible esa mejora en los parámetros rapidez y sobre oscilación, aunque son semejantes en el tiempo de establecimiento.

Las curvas 1 y 2 son las peores comparadas con los casos 3 y 4. Aunque la peor de todas es la correspondiente al caso 1 pues presenta oscilaciones grandes por amplitud y son de larga duración, lo cual generalmente no se desea tener en ningún proceso real.

Figura 2.7.

Respuesta en el tiempo ante un paso escalón del sistema típico de segundo orden.



En la figura 2.8 se muestra el desarrollo total de la curva del Caso1, donde se ha medido el tiempo de establecimiento, el cual es $t_{est} = 11.2 \text{ segundos}$

2.4 EVALUACIÓN DEL ÍNDICE S_2 DE LOS CASOS DE PRUEBA PARA EL SISTEMA DE SEGUNDO ORDEN

Para evaluar los casos anteriormente expuestos se ha diseñado el programa mostrado en el Anexo de programación, el número 2.

En la Tabla 2.2 se muestran los valores de las características de los sistemas de segundo orden empleados para las pruebas de la estimación del índice de desempeño ISE.

Figura 2.8

Medición del parámetro tiempo de establecimiento del caso 1.

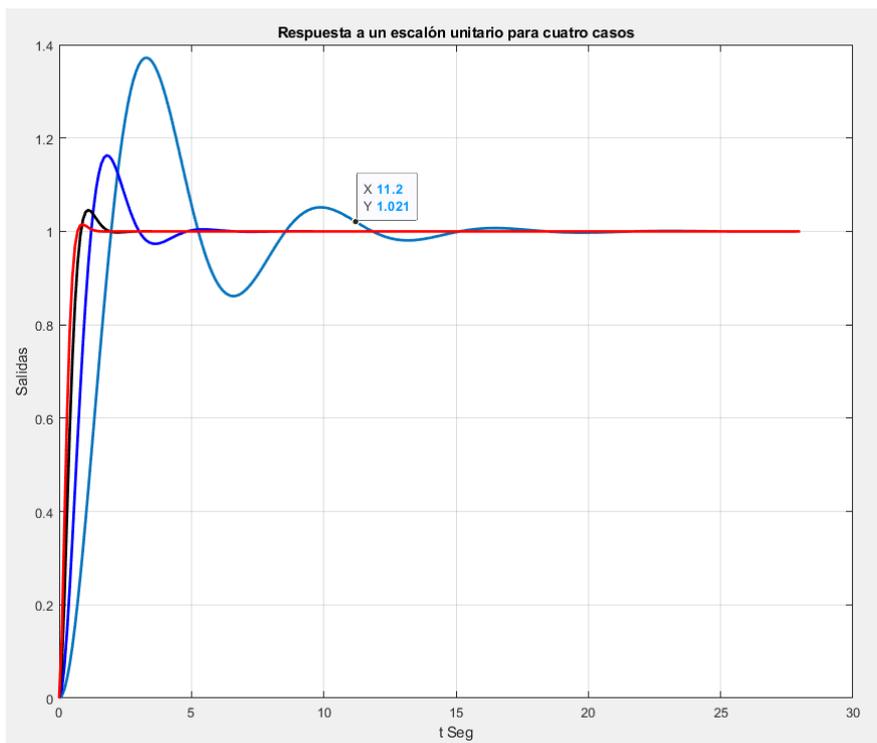


Tabla 2.2 Índice de desempeño

CASOS	VALOR DEL ÍNDICE
CASO 1	
$t_{est} = 22s$ $\alpha = 1.05$ $\beta = -0.3$ $\gamma = 0.954$	$S_2 = 20$
CASO 2	
$t_{est} = 8s$ $\alpha = 2.31$ $\beta = -1$ $\gamma = 1.73$	$S_2 = 6$
CASO 3	
$t_{est} = 3s$ $\alpha = 5.6$ $\beta = -2.8$ $\gamma = 2.86$	$S_2 = 1$
CASO 4	
$t_{est} = 2s$ $\alpha = 10$ $\beta = -4.8$ $\gamma = 3.6$	$S_2 = 9.4e^{-9}$

Como se puede observar al disminuir el valor del parámetro t_{est} , el valor del índice disminuye.

El mayor valor se corresponde con la respuesta más oscilante y el menor valor con la respuesta de mayor amortiguamiento en las oscilaciones.

CAPÍTULO 3

EMPLEO DE LAS NORMAS VECTORIALES Y MATRICIALES COMO MÉTRICAS EN LA EVALUACIÓN DEL DESEMPEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL DE PROCESOS MULTIVARIABLES.

3.1 NORMAS VECTORIALES

Definición Norma Vectorial

Sea (Γ, \mathcal{F}) un espacio vectorial. Donde Γ representa al espacio vectorial y \mathcal{F} representa al conjunto de escalares. Entonces $\|\cdot\|: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ es una norma vectorial si cumple las siguientes tres propiedades:

$$1. \|x\| \geq 0 \quad \forall x \in \Gamma \text{ y } \|x\| = 0 \text{ sii } x = 0 \quad (3.1)$$

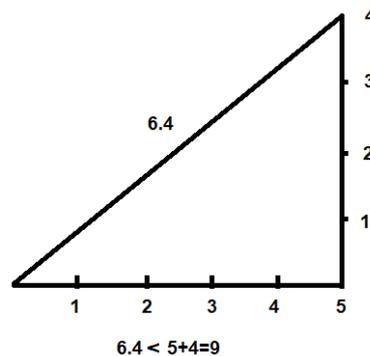
$$2. \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad \forall x \in \Gamma \text{ y } \forall \alpha \in \mathcal{F} \quad (3.2)$$

$$3. \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in \Gamma \quad (3.3)$$

Esta última se denomina desigualdad triangular, como se ve fácilmente en el diagrama habitual que ilustra la suma de dos vectores en \mathbb{R}^2 mostrado en la figura 3.1

Figura 3.1

Suma de vectores en \mathbb{R}^2



Definición. Espacio Lineal Normado

Se dice que un espacio vectorial (Γ, \mathcal{F}) es un espacio lineal normado si y solo si existe una norma vectorial $\|\cdot\|: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface las tres condiciones de la definición anterior.

Normas p

Las normas p se definen como sigue:

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}; \quad 1 \leq p \leq +\infty \quad (3.4)$$

Con los casos especiales siguientes:

- a) $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ – tambien llamada norma de "Manhattan"
- b) $\|x\|_2 = (\sum_{i=1}^n |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$ – Norma de Euclides
- c) $\|x\|_\infty = \max_{i \in n} |x_i| = \lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p$

Algunas normas son ponderadas, por ejemplo, una muy común en optimización es la siguiente:

$$\|x\|_{2,Q} = (x^T Q x)^{\frac{1}{2}} \text{ donde } Q = Q^T > 0$$

Otra norma de interés se refiere al espacio vectorial de funciones $(C[t_0, t_1], \mathbb{R})$, donde se define la norma:

$$\|f\| = \max_{t_0 \leq t \leq t_1} |f(t)|$$

En el espacio vectorial $(C[t_0, t_1]^n, \mathbb{R})$ se define la norma del vector:

$$\|f\|_\infty = \max_{t_0 \leq t \leq t_1} \|f(t)\|_\infty$$

Se define el ángulo entre dos vectores en el mismo espacio vectorial como sigue:

El ángulo θ entre dos vectores no nulos $x, y \in \mathbb{C}^n$ se define como sigue:

$$\cos \theta = \frac{|x^T y|}{\|x\|_2 \|y\|_2}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad (3.5)$$

3.2 NORMAS MATRICIALES

Al igual que con los vectores, la motivación para usar normas de matrices es tener una noción del tamaño o la proximidad de las matrices. La primera noción es útil para el análisis de perturbaciones, mientras que la segunda es necesaria para dar sentido a la "convergencia" de matrices.

Definición. Norma Matricial (Sheldon, 2015)

$\|\cdot\|: \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ es una norma matricial si ella satisface las siguientes tres propiedades:

1. $\|A\| \geq 0 \forall A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $\|A\| = 0$ sii $A = 0$
2. $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\| \forall A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (desigualdad triangular)

Definición. Norma de Frobenius (Horn & Johnson, 2013), (Laub, 2005)

La Norma de Frobenius se define como (norma matricial de Euclides)

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=1}^r \sigma_k^2(A) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.6)$$

Siendo $r = \text{rang}(A)$

3.2 DISCUSIÓN DE LOS MODELOS MATEMÁTICOS DE MÚLTIPLES ENTRADAS Y MÚLTIPLES SALIDAS

Los sistemas de múltiples entradas y múltiples salidas son muy diferentes a los sistemas de una sola entrada y una sola salida, los cuales han recibido el nombre de sistemas escalares o sistemas SISO, mientras que los de múltiples entradas y salidas son referenciados como sistemas MIMO (Skogestad, & Postlethwaite, 2001).

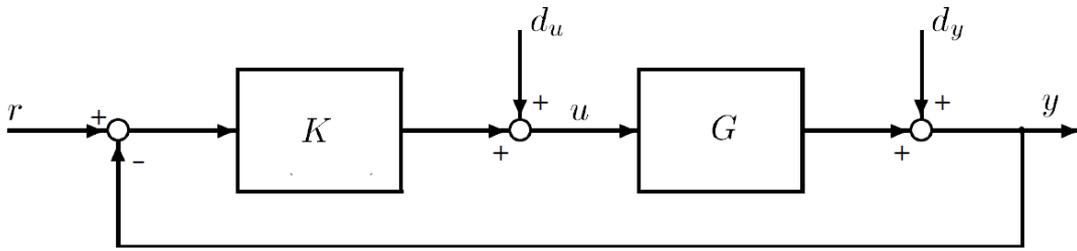
Estos últimos son sistemas vectoriales matriciales. Esto se debe a que sus entradas se consideran vectores n-dimensionales, mientras que los modelos matemáticos empleados para la dinámica del modelo se consideran matrices polinomiales.

Brevemente se exponen las premisas a partir de las cuales se justifica tales denominaciones.

Se tiene un modelo matemático dado por el diagrama mostrado en la figura 3.2 donde se muestra la válvula de control más la planta más el sensor mediante una sola función de transferencia denotada como $G(s) = G_m(s)G_p(s)G_v(s)$ donde $G_m(s)$ – es la función de transferencia del sensor, $G_p(s)$ – función de transferencia de la planta y $G_v(s)$ – función de transferencia de la válvula de control o de actuador del sistema de control.

Figura 3.2

Diagrama en bloques del sistema MIMO con perturbaciones d_u y d_y



Así las cosas, dado que el sistema es vectorial matricial la función de transferencia entre la entrada y el error a lazo cerrado se puede calcular como sigue:

$$e(s) = (I + GK(s))^{-1} r(s) \quad (3.7)$$

Donde

$S(s) = (I + GK(s))^{-1}$ – es la llamada función de sensibilidad, que determina cuan sensible es el sistema a las variaciones de los parámetros del modelo y a la vez permite determinar el error del sistema.

Para una planta SISO esta función sensibilidad es:

$$S(s) = \frac{1}{1+G(s)K(s)} \quad (3.8)$$

Que es un escalar y puede dividirse normalmente. Suponiendo una planta típica:

$$G(s) = \frac{1}{Ts+1} \quad (3.9)$$

Y un controlador ajustado

$$K(s) = \frac{k_i + sk_p}{s} \quad (3.10)$$

La función de sensibilidad queda como:

$$S(s) = \frac{1}{1 + \frac{1}{Ts+1} \frac{k_i + sk_p}{s}} = \frac{s(Ts+1)}{Ts^2 + (1+k_p)s + k_i}$$

Con $T = 1[s]$, $k_i = 15$, $k_p = 10$

$$S(s) = \frac{s(s+1)}{s^2 + 11s + 15} \quad (3.11)$$

Para una planta típica no interconectada con dos entradas y dos salidas dada como:

$$G(s) = \frac{1}{Ts+1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Y un controlador ajustado dado como:

$$K(s) = \frac{1}{s} \begin{pmatrix} k_{i1} + k_{p1} & 0 \\ 0 & k_{i2} + k_{p2} \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

$$S(s) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{Ts+1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \frac{1}{s} \begin{pmatrix} k_{i1} + sk_{p1} & 0 \\ 0 & k_{i2} + sk_{p2} \end{pmatrix} \right]^{-1} \quad (3.14)$$

Con $T = 1[s]$, $k_{i1} = 15$, $k_{p1} = 10$, $k_{i2} = 25$, $k_{p2} = 20$

$$S(s) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{s+1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \frac{1}{s} \begin{pmatrix} 15 + 10s & 0 \\ 0 & 25 + 20s \end{pmatrix} \right]^{-1}$$

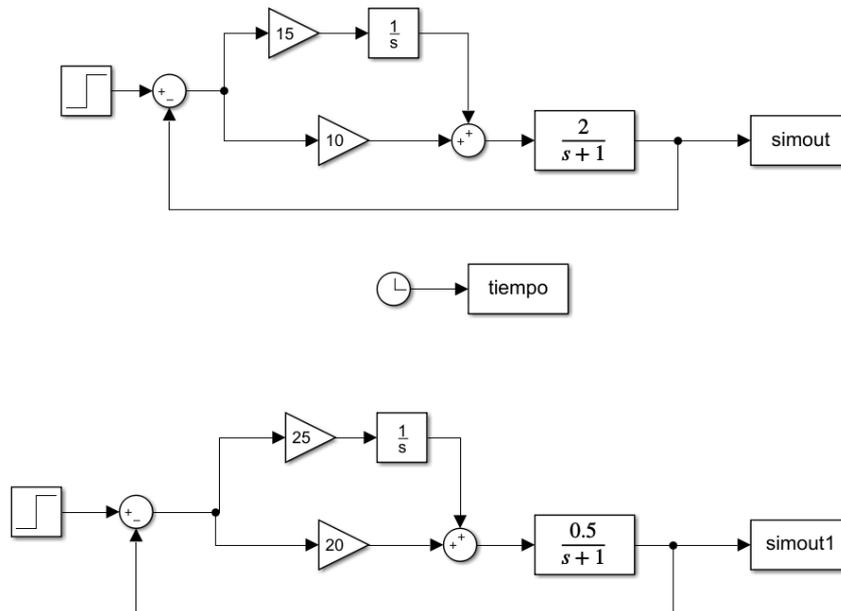
$$S(s) = \begin{bmatrix} \frac{30+20s}{s(s+1)} & 0 \\ 0 & \frac{12.5+10s}{s(s+1)} \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.15)$$

Entonces el problema en los sistemas MIMO es que se debe trabajar con la inversión de matrices de dimensión $n \times n$ para evaluar analíticamente los errores y por tanto los criterios de desempeño del sistema controlado, adicionando el hecho que la entrada es un vector $n \times 1$. Este hecho no es práctico para los especialistas del control automático.

En la figura 3.3 se muestra el ajuste de los parámetros de los controladores para la planta simple de dos entradas y dos salidas sin interacciones en los lazos de control.

Figura 3.3

Diagrama Simulink para el ajuste de los controladores.



3.3 EMPLEO DE LAS NORMAS VECTORIALES Y MATRICIALES PARA EVALUAR EL DESEMPEÑO DE LOS MODELOS MATEMÁTICOS DE MÚLTIPLES ENTRADAS Y MÚLTIPLES SALIDAS.

En (3.12) se expone una planta típica, la cual no presenta interacciones entre los lazos de control. En lo que sigue se analiza una planta donde la situación es aún más compleja y por lo tanto urge buscar métodos más simples que puedan ser empleados por los especialistas no matemáticos para evaluar los desempeños de los modelos matemáticos con funciones forzantes o de control.

La planta que se analiza es la siguiente:

$$G_p(s) = \begin{pmatrix} \frac{100}{125s+1} & \frac{60}{200s+1} \\ \frac{20}{110s+1} & \frac{130}{110s+1} \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

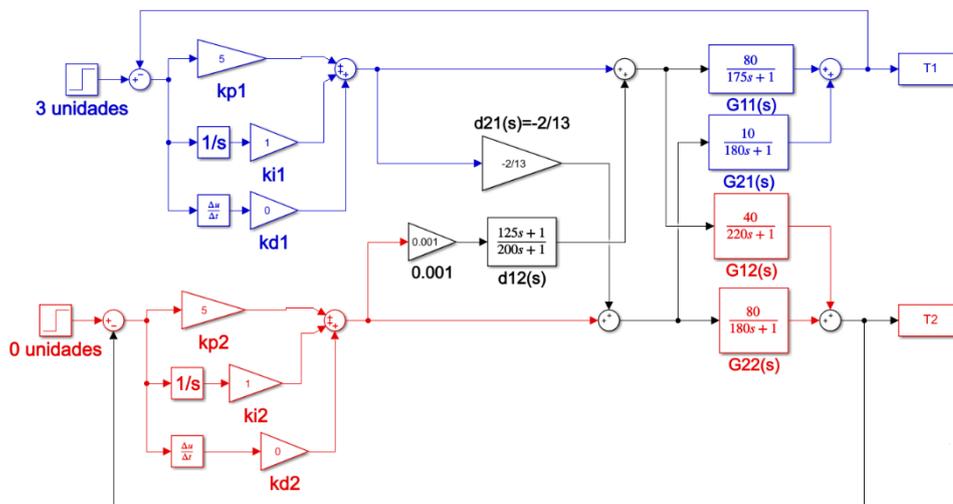
En (3.16) se puede constatar que en la diagonal secundaria las entradas ya no son cero, lo cual indica que hay interacción entre los lazos de control.

Para disminuir la interacción, en (Skogestad, & Postlethwaite, 2001) y otros se propone realizar una compensación que disminuye los enlaces entre los lazos de control.

En (Palacios Zambrano & Franco García, 2020) se ha realizado esta compensación que logra disminuir parcialmente la interacción. En la figura 3.4 se muestra el diagrama en bloques de Simulink para simular el proceso de control de las temperaturas en una extrusora de un solo eje y cuatro zonas de calentamiento.

Figura 3.4

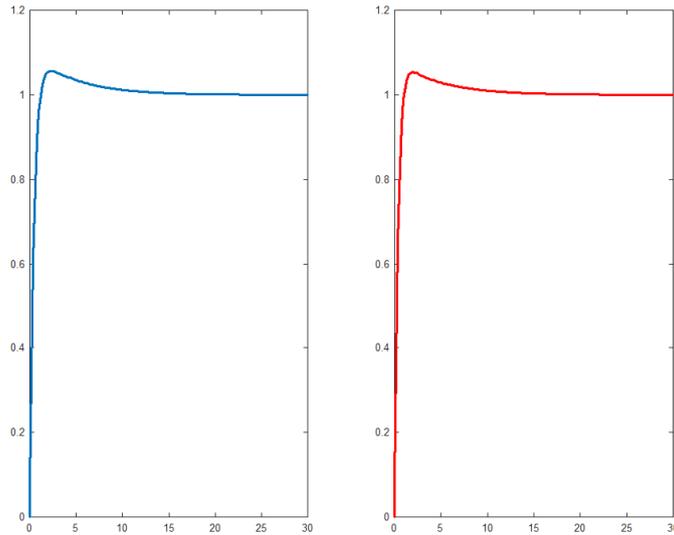
Diagrama de simulación de la extrusora controlada en (Palacios, & Zambrano , 2020).



En la figura 3.5 se muestran las respuestas del sistema cuando las referencias coinciden en tiempo.

Figura 3.5

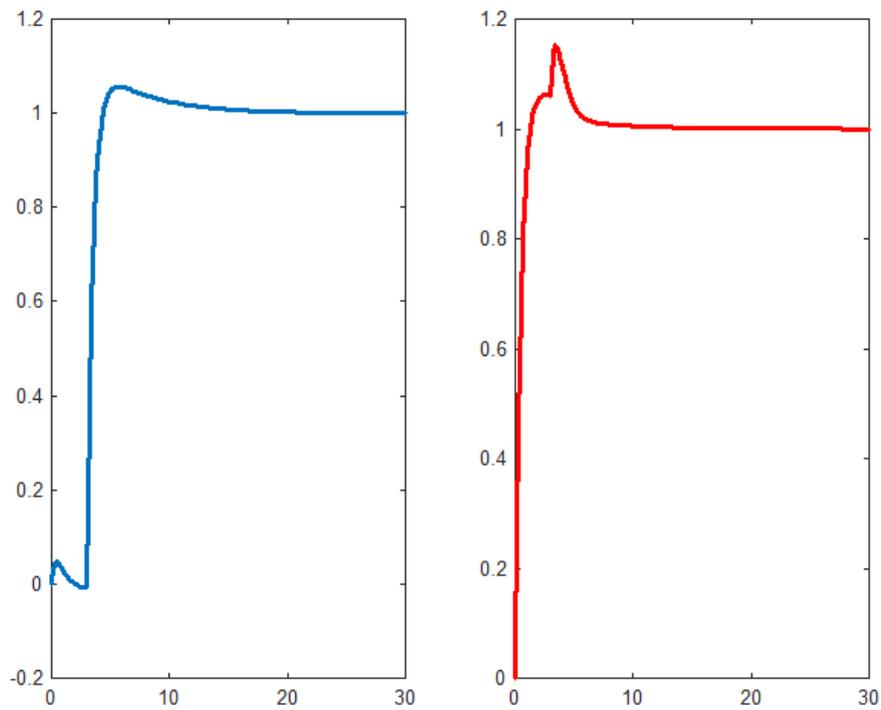
Respuestas del sistema para entradas coincidentes en tiempo.



En la figura 3.6 se muestran las respuestas del sistema con dos entradas y dos salidas cuando las entradas no coinciden en tiempo. En este caso la dinámica de un lazo perturba la dinámica del otro lazo y viceversa.

Figura 3. 6

Respuestas del sistema de dos entradas no coincidentes en tiempo de aplicación.



En la gráfica de la izquierda se puede ver que la entrada se aplica un tiempo después, a los 3 segundos aproximadamente, del inicio de la respuesta en color

rojo. Sin embargo, en ese tiempo se observa la influencia del lazo de control inferior en la figura 3.5, también de color rojo.

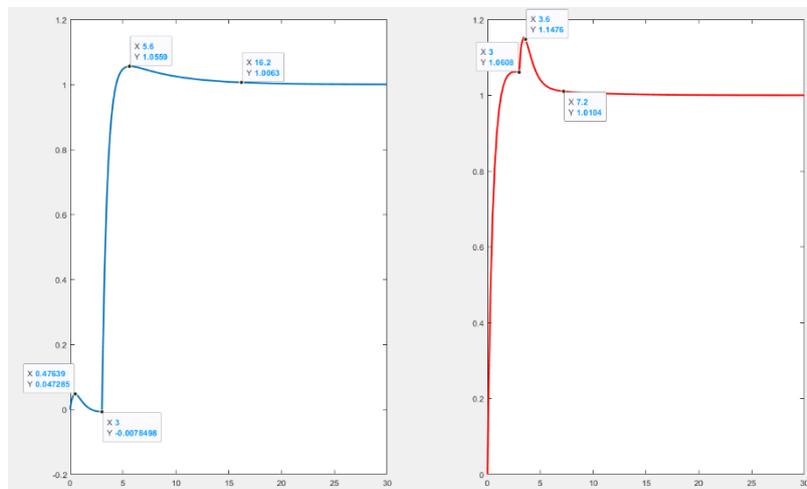
Por otro lado, en la gráfica de la derecha, en color rojo, se observa un pico que surge debido a la influencia de la entrada de referencia del lazo de control superior, de color azul, en la figura 3.5.

Esto dificulta el cálculo de cualquier índice de manera analítica. Debido a esta situación es que surge la idea de estimar un índice que proporcione una manera fácil de ejecutar la evaluación de la calidad, empleando las normas vectoriales y(o) matriciales.

En la figura 3.7 se muestra el detalle de los valores de los momentos críticos de las respuestas en el diagrama Simulink dado en la figura 3.4.

Figura 3.7

Respuestas de la extrusora para evaluar el desempeño del controlador.



Los valores de las ganancias y las amplitudes para esta corrida, con sus valores de tiempo se muestran en la Tabla 3.1

Tabla 3.1 Datos de las mediciones para el primer experimento

Ganancias	Punto 1	Punto 2	Punto 3
Lazo 1 $k_{p1} = 5$ $k_{i1} = 1$	$U_{m1} = 0.047$ $t_1 = 0.47s$	$U_{m2} = 1.056$ $t_2 = 5.6s$	$U_{m3} = 1.00$ $t_3 = 16.2s$
Lazo 2 $k_{p1} = 5$	$U_{m1} = 1.065$ $t_1 = 3 s$	$U_{m2} = 1.1476$ $t_2 = 3.6s$	$U_{m3} = 1.00$ $t_3 = 7.2s$

$$k_{i1} = 1$$

Nota: los Puntos 1, 2 y 3 en el encabezado de la tabla se corresponden con las mediciones mostradas en la figura 3.7

Un nuevo ajuste de las ganancias proporciona las respuestas mostradas en la figura 3.8 con las mediciones dadas en la Tabla 3.2.

Tabla 3.2 Datos de las mediciones para el segundo experimento

Ganancias	Punto 1	Punto 2	Punto 3
Lazo 1	$U_{m1} = 0.03$	$U_{m2} = 1.016$	$U_{m3} = 1.00$
$k_{p1} = 10$	$t_1 = 0.33s$	$t_2 = 5.1s$	$t_3 = 12s$
$k_{i1} = 1$			
Lazo 2	$U_{m1} = 1.06$	$U_{m2} = 1.2$	$U_{m3} = 1.00$
$k_{p1} = 5$	$t_1 = 3s$	$t_2 = 3.29s$	$t_3 = 7.27s$
$k_{i1} = 1$			

Figura3. 8

Respuestas en el dominio del tiempo para nuevos valores de las ganancias del controlador.

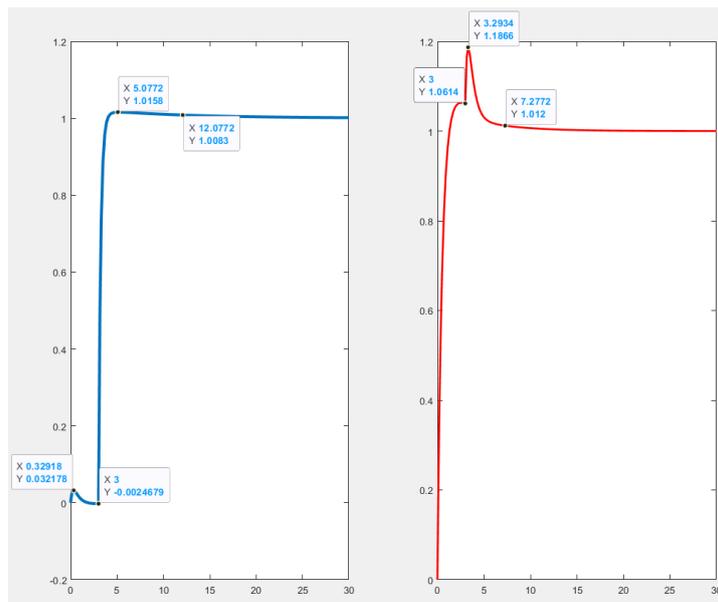


Tabla 3.3 Datos de las mediciones para el tercer experimento

Ganancias	Punto 1	Punto 2	Punto 3
Lazo 1	$U_{m1} = 0.046$	$U_{m2} = 1.016$	$U_{m3} = 1.00$
$k_{p1} = 10$	$t_1 = 0.229s$	$t_2 = 4.66s$	$t_3 = 12s$
$k_{i1} = 1$			
Lazo 2	$U_{m1} = 1.017$	$U_{m2} = 1.1086$	$U_{m3} = 1.00$
$k_{p1} = 10$	$t_1 = 3s$	$t_2 = 3.28s$	$t_3 = 7.266s$
$k_{i1} = 1$			

Para realizar la estimación del índice se forman las siguientes dos Matrices de Análisis para cada experimento, con los valores de amplitud y sus correspondientes valores de tiempo de ocurrencia. Estas matrices se muestran en las expresiones 3.17 hasta la 3.22

Experimento 1.

$$M_1^1 = \begin{pmatrix} 0.047 & 1.056 & 1 \\ 0.47 & 5.6 & 16.2 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

$$M_2^1 = \begin{pmatrix} 1.065 & 1.1476 & 1 \\ 3 & 3.6 & 7.2 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

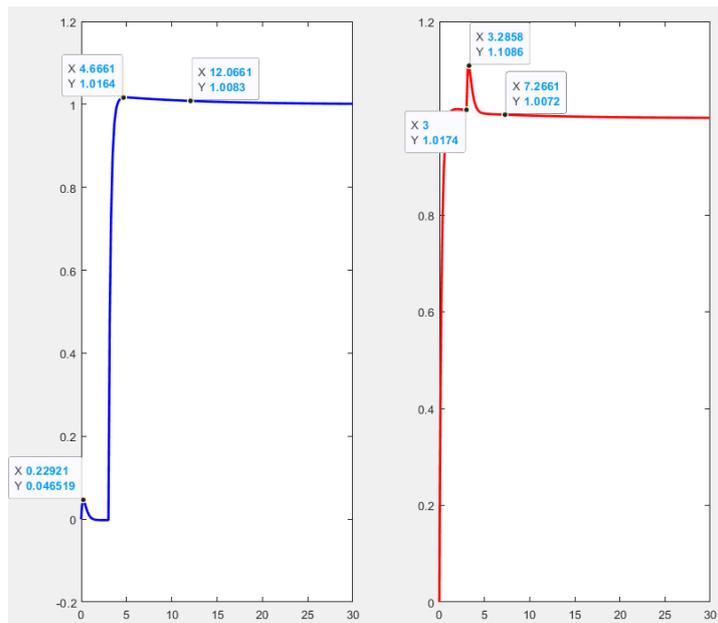
Experimento 2

$$M_1^2 = \begin{pmatrix} 0.03 & 1.016 & 1 \\ 0.33 & 5.1 & 12 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

$$M_2^2 = \begin{pmatrix} 1.06 & 1.2 & 1 \\ 3 & 3.29 & 7.27 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

Figura 3.9

Respuestas en el dominio del tiempo para otros valores de las ganancias



Experimento 3

$$M_1^3 = \begin{pmatrix} 0.046 & 1.016 & 1 \\ 0.229 & 4.66 & 12 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

$$M_2^3 = \begin{pmatrix} 1.017 & 1.1086 & 1 \\ 3 & 3.28 & 7.27 \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

La Norma de Frobenius para cada una de las matrices se calcula como sigue:

$$\|M_1^1\|_F = \sqrt{0.047^2 + 1.056^2 + 1^2 + 0.47^2 + 5.6^2 + 16.2^2} = 17.21$$

$$\|M_2^1\|_F = \sqrt{1.65^2 + 1.1476^2 + 1^2 + 3^2 + 3.6^2 + 7.2^2} = 8.879$$

Para el segundo experimento:

$$\|M_1^2\|_F = \sqrt{0.03^2 + 1.016^2 + 1^2 + 0.33^2 + 5.1^2 + 12^2} = 13.12$$

$$\|M_2^2\|_F = \sqrt{1.06^2 + 1.2^2 + 1^2 + 3^2 + 3.29^2 + 7.27^2} = 8.73$$

Para el tercer experimento:

$$\|M_1^3\|_F = \sqrt{0.046^2 + 1.016^2 + 1^2 + 0.229^2 + 4.66^2 + 12^2} = 12.95$$

$$\|M_2^3\|_F = \sqrt{1.017^2 + 1.1086^2 + 1^2 + 3^2 + 3.28^2 + 7.27^2} = 8.71$$

Las normas se han indexados como sigue:

- El supra índice indica el número de experimento 1, 2 o 3
- El sub índice indica el lazo de control 1 o 2

En la Tabla 3.4 se muestra un resumen de los valores calculados mediante las normas matriciales propuestas.

Tabla 3.4 Valores de la norma de Frobenius

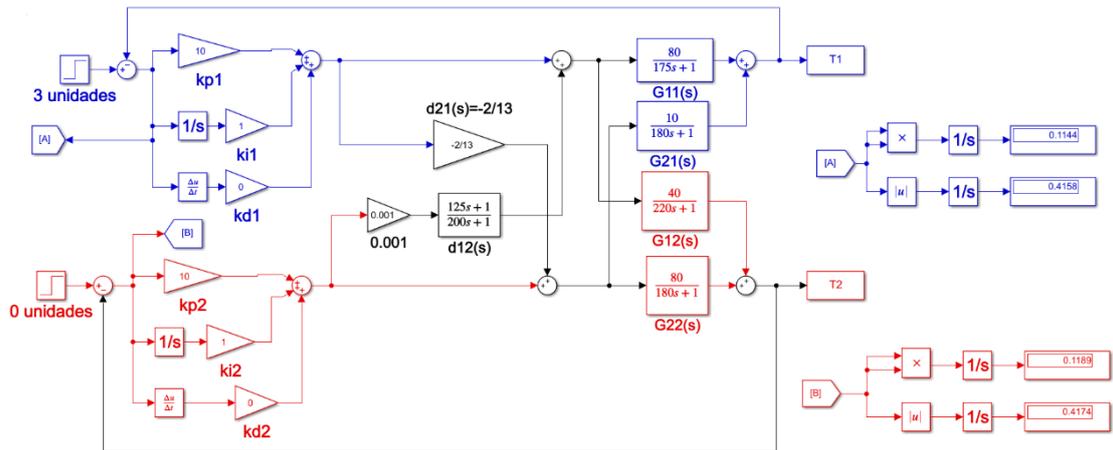
$\ M_1^1\ _F$	$\ M_1^2\ _F$	$\ M_1^3\ _F$	$\ M_2^1\ _F$	$\ M_2^2\ _F$	$\ M_2^3\ _F$
17.21	13.12	12.95	8.879	8.73	8.71

Para tener una referencia y poder comparar y evaluar el uso de la norma de Frobenius propuesta y su sensibilidad a los cambios en los parámetros k_p y k_i , se han calculado, mediante programación, los índices IAE S_1 e ISE S_2

En la figura 3.10 se muestran los bloques empleados para realizar ese cálculo.

Figura 3.10

Cálculo de los índices de desempeño IAE S_1 e ISE S_2



En la tabla 3.5 se listan los valores calculados para los experimentos 1, 2 y 3

Tabla 3.5 Valores calculados de los índices de desempeño S_1 y S_2

Número de experimento		$S_1 = \int_0^{\infty} e(t) dt$	$S_2 = \int_0^{\infty} e^2(t) dt$
Experimento 1 $k_p = 5; k_i = 5$	LAZO 1	0.791	0.2314
	LAZO 2	0.7693	0.243
Experimento 2 $k_p = 10; k_i = 5$	LAZO 1	0.4113	0.1135
	LAZO 2	0.7725	0.2464
Experimento 3 $k_p = 10; k_i = 10$	LAZO 1	0.4158	0.1144
	LAZO 2	0.4174	0.1189

Los valores en las tablas 3.4 y 3.5 no son valores normalizados por lo que a continuación se procede a su normalización empleando para ello en cada experimento y lazo de control los valores superiores.

Los índices se han indexados como sigue:

- El supra índice indica el número de lazo
- El sub índice indica F- Frobenius, el 1 indica S_1 y el 2 indica S_2

Como se observa de la Tabla 3.6 para el lazo de control 1 hay una tendencia a la disminución en los índices al variar los experimentos. Sin embargo, para el lazo de control 2 esa tendencia solo se pone de manifiesto en la norma de Frobenius.

Tabla 3.6 Tabla de índices normalizados

ÍNDICE	VALOR MAX.	EXP. 1	EXP. 2	EXP. 3
N_F^{L1}	17.21	1	0.762	0.752
S_1^{L1}	0.791	1	0.5199	0.525
S_2^{L1}	0.2314	1	0.49	0.49

N_F^{L2}	8.879	1	0.983	0.980
S_1^{L2}	0.7725	0.9958	1	0.54
S_2^{L2}	0.2464	0.956	1	0.4825

Para el segundo experimento los índices S1 y S2 del lazo 2 presentan un aumento o salto en sus valores. Sin embargo, en el tercer experimento se observa una disminución significativa de los mismos.

En general los tres índices reaccionan a los cambios en los valores de los parámetros de ajuste k_p y k_i , esto verifica el supuesto que “la Norma de Frobenius puede utilizarse para la misma evaluación que los índices S1 y S2 ya que todos son sensibles a la variación de los valores de k_p y k_i .”

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Conclusiones.

Para esclarecer los puntos de partida del análisis de los criterios se revisaron siete monografías de diversos temas desde las ecuaciones diferenciales ordinarias y sus sistemas, pasando por temas del Álgebra Lineal hasta monografías de Teoría Matemática del Control desde 1980 hasta 2015. Se tomaron como referencia dos tesis de maestría del repositorio de la MACI, FIEC, ESPOL para la revisión de diferentes modelos matemáticos de procesos químicos industriales con fechas de 2020 y 2021. Un total de nueve artículos publicados en revistas indexadas en bases de datos de la WOS fueron revisados para esclarecer las sistemáticas aplicaciones de los índices de desempeño en el ajuste de los parámetros del controlador y las nuevas propuestas teóricas que van desde fechas tan tempranas como 2003 hasta 2017, dándole cumplimiento a los dos primeros objetivos específicos. Como complemento se obtuvo la expresión (2.22) la cual permite evaluar el índice S_2 en los casos cuando la respuesta es dada como una función trascendente. Se proporciona un programa en código MATLAB® para el cálculo del índice mencionado el cual permite el cálculo y por ende la comparación de la calidad del desempeño. Se proporcionan además las tablas de valores calculados para cuatro casos. Se concluye indicando la complejidad del cálculo analítico mediante la solución de las integrales, lo cual no está acorde con la práctica ingeniera.

En el capítulo 3 se discuten los modelos matemáticos de múltiples entradas y múltiples salidas simples que sirvieron para demostrar que la propuesta de emplear la Norma de Frobenius para evaluar la calidad del desempeño de sistemas MIMO, en lugar de los índices integrales S_1 , S_3 y S_2 dados en (2.10), (2.12) y (2.22) es viable ya que la misma es sensible a los cambios en los valores de los parámetros del controlador PI, lo cual garantiza su empleo en el ajuste de los sistemas de control MIMO a lazo cerrado. Con este análisis se dio cumplimiento al tercer objetivo específico.

Finalmente, el cuarto y último objetivo específico “Comparar los resultados numéricos obtenidos con los criterios integrales y el criterio propuesto” se cumple

mediante el análisis exhaustivo del desempeño del modelo de la extrusora (3.16) sin y con perturbaciones (ver figura 3.6) empleando el índice S_2 y el cálculo de la Norma de Frobenius. Los resultados para el índice S_2 se muestran en las Tablas 3.1, 3.2 y 3.3, y los resultados del cálculo de la Norma de Frobenius y las matrices propuestas para su cálculo se proporcionan, por experimentos, desde la expresión (3.17) hasta (3.22) y se muestran en la Tabla 3.4 mismos que se comparan con los resultados mostrados en la Tabla 3.5 de Valores calculados de los índices de desempeño S_1 y S_2 . Para la comparación final, empleando valores normalizados se proporcionó la Tabla 3.6 de la cual se concluyó que “En general los tres índices reaccionan a los cambios en los valores de los parámetros de ajuste k_p y k_i , esto verifica el supuesto que “la Norma de Frobenius puede utilizarse para la misma evaluación que los índices S_1 y S_2 ya que todos son sensibles a la variación de los valores de k_p y k_i ”

Así las cosas, podemos concluir que la Norma de Frobenius puede ser empleada para la evaluación del comportamiento de los sistemas a lazo cerrado.

Se propone entonces emplear la norma mencionada para sustituir el engorroso cálculo de las integrales dadas por S_1 y S_2

Recomendaciones

Continuar la observación sobre los artículos publicados que tratan sobre las nuevas propuestas de índices de desempeño en los sistemas MIMO, tales como (Nikhil Pathak & Bhatti Ashu, 2017).

Se recomienda continuar la investigación del comportamiento de la propuesta en sistemas MIMO de mayor complejidad, o sea del tipo 3x3, 4x4, etc., y aquellos que presentan una matriz de funciones de transferencia no cuadrada.

Ampliar la investigación a sistemas no lineales de múltiples entradas y múltiples salidas tales como los procesos de reactores químicos y biorreactores.

ANEXOS

PROGRAMAS EN CÓDIGO MATLAB EMPLEADOS EN LA TESIS

Programa 1

```
% Gráficas bidimensional y tridimensional de la respuesta
% escalón de un sistema de segundo orden estándar con  $\omega_n=1$ 
% y  $\zeta=0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, \text{ y } 1$ . (Ogata, 2010)
t=0:0.2:10;
zeta=[0 0.2 0.4 0.6 0.8 1];
for n=1:6;
num=[1];
den=[1 2*zeta(n) 1];
[y(1:51,n),x,t]=step(num,den,t);
end
% Para representar un diagrama bidimensional, introduzca la
% orden
% plot(t,y).
plot(t,y)
grid
title('Respuesta a un escalón unitario con  $\omega_n=1$  y  $\zeta=0,$ 
0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1')
xlabel('t (seg)')
ylabel('Respuesta')
text(4.1,1.86,'\zeta%0')
text(3.5,1.5,'0.2')
text(3.5,1.24,'0.4')
text(3.5,1.08,'0.6')
text(3.5,0.95,'0.8')
text(3.5,0.86,'1.0')
% Para representar un diagrama tridimensional, introduzca la
% orden mesh(t,zeta,y')
mesh(t,zeta,y')
title('Respuesta tridimensional a un escalon unitario')
xlabel('t Seg')
ylabel('\zeta')
zlabel('Respuesta')
```

Programa 2

```
% Programa para calcular S2 (DE LA AUTORA DE LA TESIS)
clc
clear all
wn=input('Entre la frecuencia natural ');
xi=input('Entre la relación de amortiguamiento ');
raiz=sqrt(1-xi^2);
t=input('Entre test medido en gráficas ');
alfa=wn/raiz;
beta=-xi*wn;
g=wn*raiz;
coef1=beta/(beta^2+g^2);
coef2=g/(beta^2+g^2);
coef3=1/4*beta;
aux=g/(2*beta);
exp1=exp(beta*2*t);
exp2=exp(2*beta*2*t);
seno1=sin(g*2*t);
seno2=sin(2*g*2*t);
cos1=cos(g*2*t);
cos2=cos(2*g*2*t);
parent1=coef1*exp1*seno1-coef2*exp1*cos1+coef2;
corchete=0.5*coef1*exp2*seno2-coef2*exp2*cos2;
llave=coef3*exp2-coef3*exp2*cos2-aux*corchete;
S=t-(2*alfa*parent1)+llave*(alfa^2)
```

Programa 3

```
%Programa para dibujar respuestas de segundo orden puro (Ogata,  
2010)  
clc  
a=[1 4 16 36];  
b=[0.6 2 5.6 9.6];  
t=0:0.1:8;  
y=zeros(81,4);  
for i=1:4;  
num=[a(i)];  
den=[1 b(i) a(i)];  
y(:,i)=step(num,den,t);  
end  
figure(5)  
plot(t,y(:,1),'o',t,y(:,2),'x',t,y(:,3),'-',t,y(:,4),'-.'  
grid  
title('Respuesta a un escalón unitario para cuatro casos')  
xlabel('t Seg')  
ylabel('Salidas')  
%gtext('1')  
%gtext('2')  
%gtext('3')  
%gtext('4')
```

BIBLIOGRAFÍA

- Kunze, H., La Torre, D., Mendivil, F., Ruiz Galán, M., & Zaki, R. (2014). Inverse Problems: Theory and Application to Science and Engineering. *Mathematical Problems in Engineering*.
- Astrom , K. J., & Hagglund , T. (2009). *Control PID Avanzado*. Pearson Education, S.A.
- Atayeb , O. S., & Muawia, M. A. (2014). Robust PID Control System Design Using ITAE Performance Index (DC Motor Model). *IJRSET*, Vol. 3 Issue 8.
- Awouda , A. E., & Mamat, R. B. (2010). New PID Tuning Rule Using ITAE Criteria. *International Journal of Engineering (IJE)*,, 3(6), 597.
- Deepyaman, M., Acharya, , A., Chakraborty,, M., Konar, A., & Janarthanan, R. (2008). *Tuning PID and PIAD δ Controllers using the Integral Time Absolute Error Criterion*. ICIAFS08.
- Dorf, R. C., & Bishop, R. H. (2011). *Modern Control Systems*. USA: Prentice-Hall, Inc.,.
- Flores, M., & Redroban. , J. (2021). *Diseño del controlador predictivo multivariable para el control de un evaporador de múltiples efectos*. Guayaquil: Maci Fiec ESPOL.
- Golnaraghi , M. F., & Kuo, B. C. (2009). *Automatic Control Systems 9 ed. 2009* (9th ed.). John Wiley & Sons, INC.
- Hongqing, F., Long, C., & Zuyi , S. (2007). Comparison of Different Integral Performance Criteria for Optimal Hydro Generator Governor Tuning with a Particle Swarm Optimization Algorithm. *ICCS 2007*,, 1186–1189.
- Horn, R. A., & Johnson, C. R. (2013). *Matrix Analysis* (Second ed.). Cambridge University Press.
- Kealy, T., & O'Dwyer , A. (2003). Analytical ISE calculation and optimum control system design. *Proceedings of the Irish Signals and Systems Conference*, 418-423.
- Laub, A. J. (2005). *Matrix Analysis for Scientists & Engineers*. SIAM.
- Lay , D. C. (2006). *Álgebra lineal y sus aplicaciones* (Tercera ed.). Pearson Educación.

- Martins., F. G. (2005). Tuning PID Controllers using the ITAE Criterion. *Int. J. Eng.*, pp. 867-873,.
- Nikhil Pathak, T. S., & Bhatti Ashu, V. (2017). New performance indices for the optimization of controller gains of automatic generation control of an interconnected thermal power system. *Sustainable Energy, Grids and Networks*, 9, 27- 37.
- Ogata, K. (2010). *Modern Control Engineering 5th Edition*. Prentice Hall.
- Palacios Zambrano, V. E., & Franco García, F. G. (2020). *Diseño del controlador predictivo multivariable para el control de la temperatura y la velocidad en una extrusora de polímeros. Tesis Maestría ESPOL*. ESPOL, FIEC. Guayaquil, Ecuador: MACI. Recuperado el 3 de mayo de 2022
- Sheldon, A. (2015). *Linear Algebra Done Right* (3 ed.). Springer.
- Shinners , S. M. (1998). *Modern Control System Theory and Design* (Second ed.). John Wiley & Sons, Inc.
- Silva , F. O., Leite , F. W., Brito, A. G., & Silva, A. G. (2019). Tuning Techniques Evaluation for Satellite Launch Vehicle Attitude Controllers. *J Aerosp Technol Manag*.
- Skogestad, , S., & Postlethwaite, I. (2001). *Multivariable Feedback Control. Analysis & Design* (Second ed.). John Wiley & Sons.
- Sontag, E. D. (1998). *Mathematical Control Theory* (Second ed.). Springer.
- Speyer, J. L., & Jacobson , D. H. (2010). *Primer on Optimal Control Theory*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Strang , G. (1980). *Linear Algebra and Its Application* (Second Edition ed.). Academic Press.
- Wang, Q., Yongwei, Z., Fei, Q., & Jianfeng, L. (2010). Performance Criteria Research on PSO-PID Control Systems. *International Conference on Intelligent Computing and Cognitive Informatics*.

