



**UNIVERSIDAD ESTATAL DE MILAGRO**

**VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO**

**PROYECTO PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO:**

**MAGÍSTER EN MATEMÁTICA MENCIÓN MODELACIÓN MATEMÁTICA.**

**TÍTULO DEL PROYECTO**

**MODELO PARA LA TRANSMISION DEL VIH/SIDA ESTRATEGIA DE CONTROL**

**AUTOR**

Lic. Franklin Leónidas Elizondo Avilez

**TUTOR**

Ing. Fabricio Guevara Viejo. PhD

**Milagro, noviembre del 2022**

**ECUADOR**

## ACEPTACIÓN DEL TUTOR

Por la presente hago constar que he analizado el proyecto de grado presentado por **el Sr. Franklin Leónidas Elizondo Avilez**, para optar al título de **Magister en Matemática Mención Modelación Matemática** y que acepto tutorizar al estudiante, durante la etapa del desarrollo del trabajo hasta su presentación, evaluación y sustentación.

Milagro, a los 13 días del mes de octubre del 2022



---

Ing. Fabricio Guevara Viejo. PhD

## DECLARACIÓN DE AUTORÍA DE LA INVESTIGACIÓN

El autor de esta investigación declara ante el Consejo Directivo de la Facultad de Posgrado de la Universidad Estatal de Milagro, que el trabajo presentado es de mi propia autoría, no contiene material escrito por otra persona, salvo el que está referenciado debidamente en el texto; parte del presente documento o en su totalidad no ha sido aceptado para el otorgamiento de cualquier otro Título o Grado de una institución nacional o extranjera.

Milagro, a los 22 días del mes de noviembre del 2022



Firmado electrónicamente por:  
FRANKLIN LEONIDAS  
ELIZONDO AVILEZ

---

Lic. Franklin Leónidas Elizondo Avilez

C.I. 1203057805

**VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO**  
**DIRECCIÓN DE POSGRADO**  
**CERTIFICACIÓN DE LA DEFENSA**

El TRIBUNAL CALIFICADOR previo a la obtención del título de **MAGÍSTER EN MATEMÁTICA CON MENCIÓN MODELACIÓN MATEMÁTICA CON MENCIÓN EN MODELACIÓN MATEMÁTICA**, presentado por **ELIZONDO AVILEZ FRANKLIN LEONIDAS**, otorga al presente proyecto de investigación denominado "SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS EN LA MODELIZACIÓN DE LA ESTRATEGIA DE CONTROL EN LA DINÁMICA DE TRANSMISIÓN DEL VIH", las siguientes calificaciones:

TRABAJO DE TITULACION	60.00
DEFENSA ORAL	38.67
<b>PROMEDIO</b>	<b>98.67</b>
<b>EQUIVALENTE</b>	<b>Excelente</b>



Firmado electrónicamente por:  
**RAFAEL  
SELEYMAN LAZO  
SULCA**

---

**Msc Bio V LAZO SULCA RAFAEL SELEYMAN  
PRESIDENTE/A DEL TRIBUNAL**



Firmado electrónicamente por:  
**BYRON RAMIRO  
ROMERO ROMERO**

---

**Msc. ROMERO ROMERO BYRON RAMIRO  
VOCAL**



Firmado electrónicamente por:  
**JUAN DIEGO  
VALENZUELA  
COBOS**

---

**Ph.D. VALENZUELA COBOS JUAN DIEGO  
SECRETARIO/A DEL TRIBUNAL**

## **DEDICATORIA**

Primero a Dios, el motor de mi vida, sin él no habría podido culminar este proceso.  
A mi madre Rosalía, que ha sido un constante apoyo desde el principio de la maestría hasta culminarla y me ha ayudado en lo que necesito.  
Finalmente, a mi familia por estar siempre presente y animando a que continúe estudiando.

Lic. Franklin Leónidas Elizondo Avilez

## **AGRADECIMIENTO**

Agradezco sinceramente a mi madre, por su apoyo y consejos, los cuales han sido de gran ayuda para enfocar mis ideas en el desarrollo de este trabajo.

Agradezco de manera muy especial a mi tutor, que con su guía y el tiempo que me ha dedicado ha sido una gran ayuda y un aporte invaluable a la finalización de mi proyecto previa a la obtención del título.

También agradezco a mis amigos, que de una u otra forma han colaborado y contribuido en mi formación profesional

Lic. Franklin Leónidas Elizondo Avilez

## CESIÓN DE DERECHOS DE AUTOR

Señor Ing.

Fabrizio Guevara Viejo. PhD

Rector de la Universidad Estatal de Milagro Presente.

Ciudad. -

Mediante el presente documento, libre y voluntariamente procedo a hacer entrega de la Cesión de Derecho del Autor del Trabajo realizado como requisito previo para la obtención de mi Título de Cuarto Nivel, cuyo tema fue **“MODELO PARA LA TRANSMISION DEL VIH/SIDA ESTRATEGIA DE CONTROL”** y que corresponde al Instituto de Posgrado y Educación Continua

Milagro, a los 25 días del mes de abril del 2022



Firmado electrónicamente por:  
FRANKLIN LEONIDAS  
ELIZONDO AVILEZ

---

Lic. Franklin Leónidas Elizondo Avilez

C.I. 1203057805

## ÍNDICE GENERAL

ACEPTACIÓN DEL TUTOR.....	ii
DECLARACIÓN DE AUTORÍA DE LA INVESTIGACIÓN.....	iii
CERTIFICADO DE LA DEFENSA.....	iv
DEDICATORIA.....	v
AGRADECIMIENTO.....	vi
CESIÓN DE DERECHOS DE AUTOR.....	vii
RESUMEN.....	xii
ABSTRACT.....	xiii
INTRODUCCIÓN.....	1
<b>CAPÍTULO I.....</b>	<b>6</b>
Problema científico.....	6
Objetivo General.....	6
Planteamiento hipotético.....	6
<b>CAPITULO II.....</b>	<b>10</b>
Modelos Matemáticos de VIH/SIDA.....	10
2.1. Modelo para la Dinámica de Transmisión del VIH/SIDA en una población sexualmente activa.....	10
2.1.1. Modelo definido en Ecuaciones Diferenciales.....	10
2.1.1.1. Existencia y Unicidad de la Solución.....	15
2.2. Modelo Estocástico para VIH/SIDA.....	16
2.2.1. Estrategias de Control.....	23
2.3. Modelo de Estrategia de Control con Ecuaciones Diferenciales.....	29
2.3.1. Existencia y Unicidad de la Solución.....	30
2.3.2. Experimentación Computacional.....	33
Resultados:.....	33
Conclusiones del Capítulo.....	35
<b>CAPÍTULO III.....</b>	<b>36</b>
VALORACIÓN DEL NIVEL TEÓRICO Y DE FACTIBILIDAD DE LA METODOLOGIA.....	36
3.1 PRIMERA ETAPA: Determinación de los expertos.....	36
3.2 SEGUNDA ETAPA: Valoración de la Metodología.....	40
Conclusiones parciales del Capítulo III.....	43
Conclusiones.....	44
Recomendaciones.....	44

ANEXO # 1 .....	45
ANEXO # 2 .....	46
ANEXO # 3 .....	47
ANEXO # 4 .....	48
ANEXO # 5 .....	49
ANEXO # 6 .....	51
ANEXO # 7 .....	52
BIBLIOGRAFÍA.....	53

## ÍNDICE DE CUADROS

Cuadro 2.1: Variables y Parámetros del Modelo de VIH/SIDA .....	13
Cuadro 2.2: Valores de Parámetros .....	13
Cuadro 2.3: Comportamiento de los Hombres al paso del Tiempo .....	20
Cuadro 2.4: Comportamiento de los Mujeres al paso del Tiempo .....	22
Cuadro 2.5: Comportamiento de la Población .....	24
Cuadro 2.6: Comportamiento de la Población .....	25
Cuadro 2.7: Comportamiento de $\gamma$ Con y Sin Control .....	25
Cuadro 2.8: Comportamiento de Susceptibles .....	25
Cuadro 2.9: Comportamiento de Infectados .....	26
Cuadro 2.10: Muertes por la Enfermedad.....	26
Cuadro 2.11: Comportamiento de la Población .....	27
Cuadro 2.12: Comportamiento de la Población .....	28
Cuadro 2.13: Comportamiento de $\gamma$ Con y Sin Control.....	28
Cuadro 2.14: Comportamiento de Susceptibles .....	28
Cuadro 2.15: Comportamiento de Infectados .....	28
Cuadro 2.16: Muertes por la Enfermedad.....	29
Cuadro 2.17: Valores del Control .....	33

## ÍNDICE DE FIGURAS

<b>Figura 2.1:</b> $\delta h = 0,71$ ; $\delta m = 0,52$ .....	14
<b>Figura 2.2:</b> $\delta h = 0,56$ , $\delta m = 0,86$ .....	14
<b>Figura 2.3:</b> Comportamiento de los Hombres .....	21
<b>Figura 2.4:</b> Comportamiento de las Mujeres.....	22
<b>Figura 2.5:</b> Comparación de Controles (Hombres) .....	26
<b>Figura 2.6:</b> <i>Comparación de Controles (Mujeres)</i> .....	29
<b>Figura 2.7:</b> Hombres Infectados .....	34
<b>Figura 2.8:</b> Mujeres Infectadas.....	34
<b>Figura 2.9:</b> Representación de la recta de puntos de corte.....	42

## Resumen

En este trabajo se presenta el modelo matemático definidos por sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias para el estudio de la dinámica de transmisión del VIH/SIDA, enfermedad con una amplia repercusión a nivel mundial por la cantidad de pérdidas económicas y humanas que generan anualmente. Se proponen una estrategia de control efectivo con el objetivo de manejar la epidemia. Se construyen cadenas de Márkov teniendo en cuenta estados por los que puede transitar un individuo al estar en un escenario propenso a la epidemia, y con uso de la matriz de transición se realizó un estudio de las principales probabilidades involucradas en la dinámica de transmisión y sus influencias en el control de dichas epidemias. Se demostró la validez matemática del modelo, que pueden ser adecuados a cualquier escenario.

**Palabras clave:** VIH/SIDA, modelo matemático, control epidemia.

## **ABSTRACT**

This paper presents the mathematical model defined by systems of ordinary differential equations for the study of the transmission dynamics of HIV/AIDS, a disease with a wide impact worldwide due to the amount of economic and human losses generated annually. An effective control strategy is proposed in order to manage the epidemic. Markov chains are built taking into account states that an individual can go through when being in a scenario prone to the epidemic, and using the transition matrix, a study of the main probabilities involved in the transmission dynamics and its consequences was carried out influences in the control of these epidemics. The mathematical validity of the model was demonstrated, which may be suitable for any scenario.

**Palabras clave:** transmission dynamics, HIV/AIDS, control strategy.

## INTRODUCCIÓN

Desde su aparición en la segunda mitad del siglo XX, la infección por el Virus de Inmunodeficiencia Humana (VIH) y el Síndrome de Inmunodeficiencia Adquirida (SIDA) se han convertido en un problema de salud a escala mundial, y de hecho, constituyen la primera epidemia del siglo XXI.

De hecho, se reporta oficialmente el 5 de junio de 1981, cuando los Centros para el Control y Prevención de Enfermedades (CDC) de Estados Unidos convocaron a una conferencia de prensa donde describieron cinco casos de neumonía por *Pneumocystis carinii* en Los Ángeles, al mes siguiente se constataron varios casos de sarcoma de Kaposi, un tipo de cáncer de piel. Pese a que los médicos conocían tanto la neumonía por *Pneumocystis carinii* como el sarcoma de Kaposi, la aparición conjunta de ambas enfermedades en varios pacientes les llamó la atención.

La mayoría de estos pacientes eran hombres homosexuales sexualmente activos, muchos de los cuales también sufrían de otras enfermedades crónicas que más tarde se identificaron como infecciones oportunistas.

Las pruebas sanguíneas que se hicieron a estos pacientes mostraron que carecían del número adecuado de un tipo de células sanguíneas llamadas CD4. Las primeras constataciones de estos casos fueron realizadas por el Dr. Michael Gottlieb de San Francisco.

El **Virus de Inmunodeficiencia Humana** (VIH) infecta diversas células del sistema inmunitario, como las células T colaboradoras CD4 que expresan cierto tipo de células como; los macrófagos<sup>1</sup>, monocitos<sup>2</sup>, las células dendríticas<sup>3</sup> y las células de Langerhans<sup>4</sup>. La infección por el VIH se inicia cuando la glucoproteína de la envoltura del VIH (*env*) de una partícula viral se une a la molécula de CD4 y a un corrector que es miembro de la familia de receptores de las quimioquinas. El complejo *env* se compone de una subunidad transmembrana (*gp41*), y una subunidad externa asociada no covalentemente (*gp120*).

<sup>1</sup> Células del sistema inmunitario que se localizan en los tejidos

<sup>2</sup> Tipo de glóbulos blancos, leucocitos de mayor tamaño en la sangre

<sup>3</sup> Tipo de célula especializada característica del sistema inmunitario de los mamíferos

<sup>4</sup> Células dendríticas abundantes en la epidermis, generalmente se encuentran en los ganglios linfáticos

Estas subunidades se generan mediante la escisión proteolítica de un precursor (gp160). En este procedimiento median múltiples pasos entre la fusión de la envoltura del virión con la membrana de la célula objetivo.

El primer paso de este proceso es la unión de las subunidades gp120 a las moléculas de CD4, lo que induce un cambio de configuración que promueve la unión de las subunidades gp120 al correceptor para la quimioquinas. La unión a este correceptor induce un cambio en gp41 que expone una región hidrófoba, denominada péptido de fusión que se inserta en la membrana celular y promueve la fusión con la membrana viral. Las partículas del VIH liberadas de una célula infectada pueden unirse a una célula no infectada.

Otra posibilidad es que gp120 y gp41, que se expresan en la membrana plasmática de las células infectadas antes de que se libere el virus, medien la fusión célula- célula con una célula CD4 no infectada que exprese al correceptor, y entonces pueden transferirse directamente los genomas VIH entre las células fusionadas. Una vez que el virión del VIH penetra en una célula, las enzimas del complejo se activan y comienzan el ciclo reproductor viral.

El centro nucleoproteico del virus se desestructura, el genoma ARN del VIH se transcribe a la forma de ADN bicatenario por acción de la transcriptasa inversa viral y el ADN viral penetra en el núcleo. La integrasa viral también penetra en el núcleo y cataliza la integración del ADN viral en el genoma de la célula huésped. La forma integrada del ADN del VIH se denomina provirus. El provirus puede permanecer inactivo durante meses o años, con una producción escasa o nula de nuevas proteínas virales o viriones y de este modo, la infección por el VIH de una célula individual puede ser latente.

La producción de virus maduro se asocia a la lisis celular, lo cual es un importante mecanismo del efecto citopático del VIH. Tras la transcripción de diversos genes del virus, se sintetizan las proteínas virales infecciosas mediante el empaquetamiento de transcritos de ARN de longitud completa del genoma proviral en el interior de un complejo nucleoproteico necesario para el siguiente ciclo de integración.

El Síndrome de Inmunodeficiencia Adquirida (SIDA) es la incapacidad del sistema inmunológico para hacer frente a las infecciones y otros procesos patológicos que reducen grandemente la capacidad de defensa del organismo.

Su principal vía de contagio es la sexual, aunque aparecen otras vías de transmisión al compartir agujas hipodérmicas contaminadas del virus, o durante la gestación, el parto y lactancia de mujeres infectadas y en un bajo índice por transmisión sanguínea y por accidentes en el tratamiento de pacientes que padecen de la enfermedad.

Cabe destacar la diferencia entre estar infectado por el VIH y padecer de SIDA. Una persona infectada por el VIH es seropositiva y pasa a desarrollar un cuadro de SIDA cuando su nivel de CD4, desciende por debajo de un umbral mínimo de células por mililitro de sangre.

Conocer los modos de transmisión de VIH de un individuo a otro es muy importantes para comprender el comportamiento del virus.

Este se transmite por:

1. Transmisión Sexual es la más frecuente en sus diversas variantes. El virus se encuentra en el semen y accede a la pareja no afectada por la mucosa vaginal o través de la mucosa rectal traumatizada.
2. Transmisión Parental es la segunda vía más frecuente es la inoculación de un receptor con sangre o hemoderivados infectados
3. Transmisión Vertical es la principal vía de infección pediátrica. Esta ocurre con mayor frecuencia en el útero o durante el parto, aunque también es posible la transmisión por la leche materna.

4. Transmisión Trasplacentaria puede producirse por el paso de macrófagos portadores del provirus en su material genético de la madre al feto a través de una infección primaria de la placenta con posterior transmisión fetal, estando involucradas las llamadas células de Hofbauer (macrófagos placentarias) debido a su elevada concentración en placenta y por poseer receptores CD4 en su membrana.
5. Transmisión Intraparto este tipo de transmisión se produce en el momento del paso fetal a través del canal del parto, de forma similar a los casos de infección por herpes virus genital. Una característica de esta vía es que en los casos de gestaciones gemelares se afecta con más frecuencia el primer gemelo, por lo que parece demostrada la importancia de esta vía en la contaminación fetal. El hecho de que se intercambien sangre materna y fetal en el momento del parto es otro factor a considerar como vía de transmisión.
6. Transmisión a través de la lactancia materna el VIH ha sido aislado en la fracción celular del calostro humano. La posibilidad de transmisión vertical de la infección mediante la lactancia ha sido demostrada en los casos en que la infección materna ha sido adquirida por la transfusión en el postparto [9].

Por el gran impacto social que genera la gravedad y magnitud de esta pandemia, desde su aparición, ha sido motivo de preocupación para la comunidad científica mundial, del que no escapa el interés por su modelación y análisis matemático, en aras de aportar esencialmente a las políticas de control de su desarrollo. En la literatura se han propuesto distintos modelos de la epidemia en función de los factores que se pueden tener en cuenta o las técnicas utilizadas ([1], [18], [5], [6], [9], entre muchos otros).

La mayoría de las investigaciones sobre el VIH/SIDA, se dedicaron al entendimiento de su ocurrencia y presentación en las poblaciones y sus entornos.

Posteriormente y hasta la actualidad las investigaciones se han concentrado en la exploración de la transmisión del VIH en grupos particulares que han facilitado la

proliferación del virus, y el impacto económico en los sistemas de salud y el mercado laboral.

Después de algunos años de estudio de la epidemia, las investigaciones se mueven con el paradigma del individuo como unidad de análisis, pues para detener o disminuir la transmisión deben entenderse bien las relaciones sociales en las cuales ocurren las conductas de riesgo.

El estudio del VIH/SIDA, en el caso de Cuba, es especialmente interesante ya que la enfermedad presenta una incidencia muy baja (el SIDA se muestra como la vigésima causa de muerte en Cuba en general), especialmente si se compara con el resto de países de América Latina, segunda zona de mayor proliferación mundial, [9], [6].

## CAPÍTULO I

Teniendo en cuenta el estudio realizado en esta área del conocimiento, se asume como

### **Problema científico:**

¿Cómo contribuir al control de la vigilancia epidemiológica para la epidemia del VIH/SIDA?

Su **objeto de estudio** es el proceso epidemiológico para el VIH/SIDA.

El **campo de acción** es un modelo matemático para controlar de forma efectiva la epidemia.

### **Objetivo General:**

Construir un modelo matemático para la epidemia del VIH/SIDA estudiando su comportamiento al paso del tiempo y proponiendo una estrategia de control efectiva.

Los **objetivos específicos** que se proponen en este trabajo son:

1. Estudiar modelos que describen la dinámica de esta epidemia reportado en la literatura especializada.
2. Formular un modelo para la transmisión del VIH/SIDA utilizando sistemas de ecuaciones diferenciales. Además, utilizar como base la matriz de transición en una cadena de Markov.
3. Proponer una estrategia de control para esta epidemia basada en la ponderación de parámetros.
4. Realizar una experimentación numérica para verificar la eficacia del modelo y de la estrategia de control.
5. Aplicar el Método de Experto para corroborar el valor científico metodológico del algoritmo y la estrategia para el control de esta epidemia de transmisión del VIH/SIDA.

### **Planteamiento hipotético**

A partir de los presupuestos anteriores, la **hipótesis** fue definida en los siguientes términos:

Si se desarrolla un modelo matemático para la epidemia del VIH/SIDA utilizando sistemas de ecuaciones diferenciales y elaborar una estrategia de control basada en la ponderación de parámetros entonces se podrá controlar de forma efectiva la epidemia.

Para cumplir el objetivo planteado se propone el desarrollo de las siguientes **tareas de investigación**:

1. Análisis de los referentes teóricos en que se fundamenta la transmisión del VIH/SIDA.
2. Estudiar en la literatura especializada los modelos matemáticos que describen esta epidemia utilizando sistemas de ecuaciones diferenciales.
3. Propuesta de un algoritmo para el control de esta epidemia de transmisión del VIH/SIDA.
4. Diseño y ejecución del experimento para evaluar los resultados.
5. Se aplica el Método de Experto para corroborar el valor científico metodológico del algoritmo y la estrategia para el control de esta epidemia de transmisión del VIH/SIDA

Se utilizaron diferentes **métodos de investigación**, los fundamentales son mencionados a continuación:

- Los procedimientos lógicos del pensamiento, **análisis y síntesis**, así como la **inducción y deducción**, facilitaran la determinación de los fundamentos y teorías relacionadas con la transmisión del VIH/SIDA, lo que contribuirá a la sistematización de la información sobre el tema y a la elaboración del marco teórico de referencia.
- **Histórico-lógico** en el estudio de la evolución de diferentes algoritmos para para el control de esta epidemia de transmisión del VIH/SIDA.
- **Análisis de documentos** en la consulta de literatura especializada relacionada con la teoría de transmisión del VIH/SIDA.

- **Método de modelación**, que posibilitara establecer la existencia de niveles para destacar y representar las características y las relaciones entre los componentes del campo de acción.
- **Método de Experto** para corroborar el valor científico metodológico del algoritmo para el control de esta epidemia de transmisión del VIH/SIDA.
- **Métodos estadísticos** en la realización de estudios experimentales y mediciones relacionadas con el control de esta epidemia de transmisión.

Consideramos sólo la **población** sexualmente activa,  $P(t)$  para un tiempo  $t > 0$  y suponemos que la población se encuentra dividida en cuatro clases disjuntas  $x_{h(m)}$ : hombres (mujeres) susceptibles (no portadores del virus) y  $y_{h(m)}$  hombres (mujeres) infectadas (portadores de la enfermedad). Así tenemos que  $P(t) = x_h(t) + x_m(t) + y_h(t) + y_m(t)$ .

El valor de los parámetros para la **muestra** se tomó a partir de datos que reporta la OMS (Organización Mundial de Salud) para países del Caribe en el 2021.

La tesis está estructurada en introducción, capítulo I, capítulo II, capítulo III, conclusiones, recomendaciones, bibliografías y anexos. Los capítulos son los siguientes:

- Introducción; se explican las características generales de las epidemias, se presenta el diseño teórico y metodológico de la investigación.
- Capítulo 1: Marco Teórico; se presenta un resumen de los tipos de modelos epidemiológicos, se expone la teoría aplicada en la tesis, definiciones, métodos y teoremas fundamentales.
- Capítulo 2: Modelos para la Transmisión del VIH/SIDA; se proponen modelos para la epidemia del VIH/SIDA, estrategias de control y su validación mediante experimentación computacional.
- Capítulo 3: Se aplica el Método de Experto para corroborar el valor científico metodológico del algoritmo y la estrategia para el control de esta epidemia de transmisión del VIH/SIDA.

Finalmente se incluyen las conclusiones y recomendaciones para trabajos futuros. Además, la bibliografía consultada es pertinente al problema que se aborda.

## CAPITULO II

### Modelos Matemáticos de VIH/SIDA

En este capítulo se presentan propuestas de modelos para la epidemia del VIH/SIDA, con uso de los sistemas de ecuaciones diferenciales y los procesos estocásticos, con ellos se pretende predecir el comportamiento de la epidemia al paso del tiempo y después de un estudio, se proponen estrategias de control efectivas basada en la ponderación de parámetros, con el fin de reducir el impacto de la epidemia.

#### 2.1. Modelo para la Dinámica de Transmisión del VIH/SIDA en una población sexualmente activa.

Una de las herramientas más interesantes que actualmente disponemos para analizar y predecir el comportamiento de un sistema biológico es la construcción y posterior simulación de un modelo matemático.

Son muchas las razones que justifican la edad de oro que hoy en día vive la modelización matemática, pero debemos de destacar, en primer lugar, el mejor conocimiento de los procesos biológicos, y en segundo lugar, el espectacular avance de los ordenadores y el software matemático.

Por tanto, un modelo es la representación de un proceso. Si en un fenómeno biológico se conocen los procesos internos y las relaciones entre ellos, entonces es posible conocer las ecuaciones (que dependerán de si el modelo es discreto o continuo) que lo describan.

##### 2.1.1. Modelo definido en Ecuaciones Diferenciales

Para el planteamiento del modelo consideramos sólo la población sexualmente activa,  $P(t)$  para un tiempo  $t > 0$  y suponemos que la población se encuentra dividida en cuatro clases disjuntas  $xh(m)$ : hombres (mujeres) susceptibles (no portadores del virus) y  $yh(m)$  hombres (mujeres) infectadas (portadores de la enfermedad). Así tenemos que  $P(t) = xh(t) + xm(t) + yh(t) + ym(t)$ .

Suponemos que cualquier individuo de la población puede morir por causa natural (diferente del SIDA) en cualquier momento e independiente de la clase a la que pertenezca

en ese momento. Esta tasa será la misma en todas las clases y se denota como  $\mu$ . La tasa de muerte por la enfermedad está solo determinada para los infectados.

Sea  $\gamma$ ,  $m_1$  y  $m_2$  la probabilidad de adquirir el virus, de hombre a hombre, de hombre a mujer y de mujer a hombre en sólo un contacto respectivamente. Entonces estos parámetros tienen que ser proporcionales a la razón entre el número de infectados y el número total de individuos en la población, considerando las constantes de proporcionalidad respectivas  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  que permiten definir las probabilidades de transmisión:  $\gamma = \frac{\beta_1}{P}, m_1 =$

$$\frac{\beta_2}{P}, m_2 = \frac{\beta_3}{P}$$

Se asume que los infectados y los susceptibles se mezclan homogéneamente, porque la probabilidad de adquirir la enfermedad crece al aumentar el número de parejas sexuales,  $c_1, c_2, c_3$  representa el número de contactos entre hombre susceptible y hombre infectado, mujer susceptible y hombre infectado y hombre susceptible y mujer infectada respectivamente.

Definimos las constantes  $H_{ns}$  y  $M_{ns}$  que representan los hombres y las mujeres no susceptibles (no sexualmente activos) y definimos la tasa de la entrada a ser sexualmente activos  $\delta_h$  y  $\delta_m$  de hombres y mujeres respectivamente. Se asume que el hombre o la mujer que pasa a ser sexualmente activo se incorpora al compartimento de los susceptibles.

La ecuación que representa la variación en el tiempo de los hombres susceptibles ( $xh$ ) es:  $\frac{dxh}{dt} = \delta_h H_{ns} - \gamma c_1 y h x h - m_2 c_3 y m x h - \eta x h - T_1 x h$

El término  $\delta_h H_{ns}$  representa a los hombres no susceptibles que se hacen sexualmente activos,  $\gamma c_1 y h x h$  a los hombres susceptibles que quedan infectados por tener contacto con hombres infectados,  $m_2 c_3 y m x h$  a los hombres susceptibles que quedan infectados por contacto con mujeres infectadas y  $\eta x h$  a los hombres susceptibles que se infectan por contacto con sangre infectada y  $T_1 x h$ , la mortalidad de hombres susceptibles.

La ecuación que representa el comportamiento de las mujeres susceptibles ( $xm$ ) en el tiempo es:  $\frac{dxm}{dt} = \delta_m M_{ns} - m_1 c_2 y h x m - (\eta + T_2) x m$

Donde  $\delta_m M_{ns}$  representa las mujeres que pasan a ser sexualmente activas,  $m_1 c_2 y h x m$  a las mujeres que se infectan al tener contacto con hombres infectados,  $\eta x m$  a las mujeres que quedan infectadas por contacto con sangre infectada y  $T_2 x m$ , la mortalidad en mujeres susceptibles.

La ecuación que representa la variación en el tiempo de los hombres infectados ( $y h$ ) es: 
$$\frac{d y h}{d t} = \gamma c_1 y h x h + m_2 c_3 y m x h + \eta x h - (\epsilon + T_1) y h$$

Se incorporan los antes mencionados,  $\gamma c_1 y h x h$ ,  $m_2 c_3 y m x h$  y  $\eta x h$  y salen  $\epsilon y h$  que son los infectados que mueren de la enfermedad y  $T_1 y h$  que representa la mortalidad en hombres infectados por causa ajena al SIDA.

La ecuación que representa la variación en el tiempo de las mujeres infectadas ( $y m$ ) es: 
$$\frac{d y m}{d t} = m_1 c_2 y h x m + \eta x m - (\mu + T_2) y m$$

Se incorporan  $m_1 c_2 y h x m$  y  $\eta x m$  y salen  $\mu y h$  que son las infectadas que mueren de la enfermedad y  $T_2 y m$  que representa la mortalidad en mujeres infectadas por causa ajena al SIDA.

Por lo tanto, la dinámica de transmisión del VIH/SIDA se modela mediante el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d x h}{d t} = \delta_h H_{ns} - \gamma c_1 y h x h - m_3 c_3 y m x h - (\eta + T_1) x h$$

$$\frac{d x m}{d t} = \delta_m M_{ns} - m_1 c_2 y h x m - (\eta + T_2) x m$$

$$\frac{d y h}{d t} = \gamma c_1 y h x h + m_2 c_3 y m x h + \eta x h - (\epsilon + T_1) y h$$

$$\frac{d y m}{d t} = m_1 c_2 y h x m + \eta x m - (\mu + T_2) y m$$

Condiciones Iniciales

$$t \in [0, n]$$

$$x h(0) = x h_0$$

$$x m(0) = x m_0$$

$$y h(0) = y h_0$$

$$y m(0) = y m_0$$

<b>Variable o Parámetro</b>	<b>Descripción</b>
$xh$	Hombres susceptibles
$xm$	Mujeres susceptibles
$yh$	Hombres infectados
$ym$	Mujeres infectadas
$\delta h$	Tasa de hombres susceptibles que ingresan a la población
$\delta m$	Tasa de mujeres susceptibles que ingresan a la población
$T1; T2$	Tasas de mortalidad para hombres y mujeres
$\epsilon; \mu$	Tasas de hombres y mujeres que mueren de la enfermedad
$\gamma$	Probabilidad de contagio de Hombre a Hombre
$m_1$	Probabilidad de contagio de Hombre a Mujer
$m_2$	Probabilidad de contagio de Mujer a Hombre
$\eta$	Tasa de infección por contacto con sangre infectada

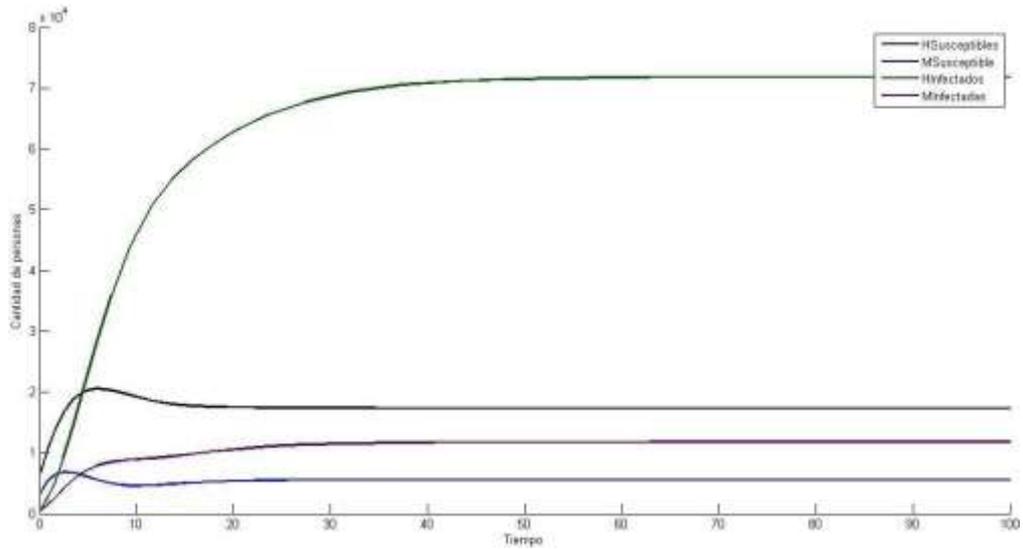
**Cuadro 2.1:** Variables y Parámetros del Modelo de VIH/SIDA

Los parámetros  $\gamma, m_1, m_2, \eta, T1, T2, \epsilon, \mu, \delta h, m$  están entre 0 y 1, y se explican en el Cuadro 2.1 y  $xh_0; xm_0; yh_0; ym_0$  son reales positivos.

Las condiciones iniciales y los valores de los parámetros se tomaron del Anuario de Salud de Ecuador (2014), y se estudió el comportamiento de hombres y mujeres al paso del tiempo, ver Cuadro 2.1.

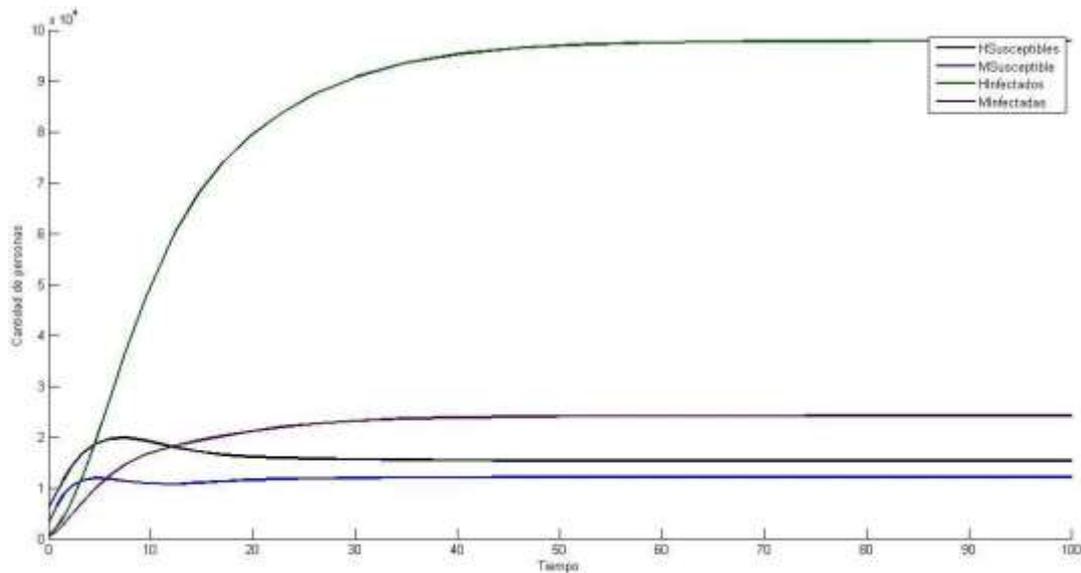
Parámetros	Valores	Parámetros	Valores
$\delta h$	0,71    0,52	$T1$	0,00368374
$\delta m$	0,56    0,82	$T2$	0,003053174
$\epsilon$	0,00108814	$\mu$	0,000240403924748
$\gamma$	0,0002799993	$m_1$	0,0001199987
$m_2$	0,0002000334		
$\eta$	0,000000001		

**Cuadro 2.2:** Valores de Parámetros



**Figura 2.1:**  $\delta h = 0,71$ ;  $\delta m = 0,52$

Haciendo variar la tasa de entrada a la vida sexual de hombres y mujeres, se tiene que el crecimiento de los hombres infectados es superior con respecto a las demás variables que describen la dinámica. Se realizaron variaciones y comparaciones con los otros parámetros y tasas y la información que nos brinda no cambia, pero sí se evidenció la influencia que tienen  $\gamma$  y  $m_1$  en el crecimiento de la epidemia (Figuras [2.1], [2.2]).



**Figura 2.2:**  $\delta h = 0,56$ ,  $\delta m = 0,86$

### 2.1.1.1. Existencia y Unicidad de la Solución

Utilizamos la variante del teorema de existencia y unicidad para modelos epidemiológicos.

Sea  $F(x) = (F1(x); F2(x); F3(x); F4(x))$  donde  $x = (xh; xm; yh; ym)$

$$F1(x) = \delta_h H_{ns} - \gamma C_1 y h x h - m_2 C_3 y m x h - (\eta + T_1) x h$$

$$F2(x) = \delta_m M_{ns} - m_1 C_2 y h x m - (\eta + T_2) x m$$

$$F3(x) = \gamma C_1 y h x h + m_2 C_3 y m x h + \eta x h - (\epsilon + T_1) y h$$

$$F4(x) = m_1 C_2 y h x m + \eta x m - (\mu + T_2) y m$$

$xh, xm, yh$  y  $ym$  son continuas y positivas por definición del modelo epidemiológico.

$\therefore F1, F2, F3$  y  $F4$  son funciones continuas y diferenciables (son combinación de funciones elementales).

Analicemos la continuidad de las derivadas parciales de cada función,

$$F1(x) = \delta_h H_{ns} - \gamma C_1 y h x h - m_2 C_3 y m x h - \eta x h - T_1 x h,$$

$$\frac{\partial F1}{\partial xh} = -\gamma C_1 y h - m_2 C_3 y m - (\eta + T_1),$$

$$\frac{\partial F1}{\partial xm} = 0,$$

$$\frac{\partial F1}{\partial yh} = -\gamma C_1 y h,$$

$$\frac{\partial F1}{\partial ym} = -m_2 C_3 y m.$$

$$F2(x) = \delta_m M_{ns} - m_1 C_2 y h x m - (\eta + T_2) x m,$$

$$\frac{\partial F2}{\partial xh} = 0,$$

$$\frac{\partial F2}{\partial xm} = -m_1 C_2 y h - (\eta + T_2),$$

$$\frac{\partial F2}{\partial yh} = -m_1 C_2 y m,$$

$$\frac{\partial F2}{\partial ym} = 0.$$

$$F3(x) = \gamma C_1 y h x h + m_2 C_3 y m x h + \eta x h - (\epsilon + T_1) y h,$$

$$\frac{\partial F3}{\partial xh} = \gamma C_1 y h + m_2 C_3 y m + \eta,$$

$$\frac{\partial F3}{\partial yh} = \gamma C1 xh - (\epsilon + T1),$$

$$\frac{\partial F3}{\partial ym} = m_2 C3 xh,$$

$$\frac{\partial F3}{\partial xm} = 0.$$

$$F4(x) = m_1 C2 yhxm + \eta xm - (\mu + T2)ym,$$

$$\frac{\partial F4}{\partial xm} = m_1 C2 yh + \eta,$$

$$\frac{\partial F4}{\partial ym} = -(\mu + T2),$$

$$\frac{\partial F4}{\partial xh} = 0,$$

$$\frac{\partial F4}{\partial yh} = m_1 C2 xm.$$

∴ Todas las funciones y sus derivadas parciales son continuas.

∴ F localmente Lipschitz continúa.

Además se cumple:

$$F1(0, xm, yh, ym) = \delta h Hns > 0,$$

$$xm, yh, ym > 0.$$

$$F2(xh, 0, yh, ym) = \delta m Mns > 0,$$

$$xh, yh, ym > 0.$$

$$F3(xh, xm, 0, ym) = (m_2 C3 ym + \eta)xh > 0,$$

$$xh, xm, ym > 0.$$

$$F4(xh, xm, yh, 0) = (m_1 C2 yh + \eta)xm > 0,$$

$$xh, yh, xm > 0.$$

∴ Existe y es única la solución por el Teorema de Existencia y Unicidad en su variante epidemiológica.

## 2.2. Modelo Estocástico para VIH/SIDA

Para el estudio de la epidemia, definimos los cuatro posibles estados por los que transitará un individuo, S: susceptible, I: infectado, N: muerte natural y E: muerte por la

enfermedad. Establecemos una cadena de Markov con los estados anteriores, considerando un año como unidad de tiempo.

Denotemos:

$\alpha = P(x_n = S / x_{n-1} = S)$  : Probabilidad de mantenerse en el estado de susceptible.

$\beta = P(x_n = I / x_{n-1} = I)$ : Probabilidad de mantenerse en el estado de infectado.

$\mu = P(x_n = S, I / x_{n-1} = N)$ : Probabilidad de muerte natural.

$\gamma = P(x_n = I / x_{n-1} = S)$ : Probabilidad de, estando en el estado susceptible, pasar al estado de infectado.

$\epsilon = P(x_n = E / x_{n-1} = I)$ : Probabilidad de muerte por la enfermedad dado que se está en el estado infectado.

Observaciones:

1. Se tiene  $\alpha + \gamma + \mu = 1$ ,  $\beta + \mu + \epsilon = 1$  para que se cumplan las propiedades de la matriz de transición.
2. La muerte natural tendrá la misma probabilidad condicional si partimos del estado de susceptible o infectado.

Las relaciones existentes entre los posibles estados dados por las probabilidades de tránsito, se representan en la siguiente tabla:

Estados	S	I	N	E
S	$\alpha$	$\gamma$	$\mu$	0
I	0	$\beta$	$\mu$	$\epsilon$
N	0	0	1	0
E	0	0	0	1

La matriz de transición T de este proceso tiene la forma:

$$\begin{bmatrix}
 \alpha & \gamma & \mu & 0 \\
 0 & \beta & \mu & \epsilon \\
 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1
 \end{bmatrix}$$

La matriz potencia  $T^n$  tiene la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} a^n & \frac{\gamma(\alpha^n - \beta^n)}{(\alpha - \beta)} & \frac{\mu\alpha^n(\alpha + \gamma - \beta)}{(\alpha - \beta)(\alpha - 1)} + \frac{\mu(\alpha - \beta + 1)}{(\alpha - 1)(\beta - 1)} & \frac{\gamma\mu\beta^n}{(\alpha - \beta)(\beta - 1)} & \frac{\gamma^\epsilon(\alpha - \beta + \alpha^n\beta - \alpha^n - \beta^n\alpha - \beta^n)}{(\alpha - 1)(\alpha - \beta)(\beta - 1)} \\ 0 & \beta^n & & & \\ 0 & & \frac{\mu(\beta^n - 1)}{(\beta - 1)} & & \frac{\mu(\beta^n - 1)}{(\beta - 1)} \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En epidemias humanas, la matriz de transición suele obtenerse a partir de datos de la población, incidencia, prevalencia y mortalidad publicados en los registros oficiales, en nuestro caso, el Anuario Estadístico de Salud 2020 en Ecuador.

Consideramos una población sexualmente activa, la cantidad de hombres es 4140084 y de mujeres es 4153055, la cantidad de infectados hombres es 15146 y de mujeres 3788, reportándose la entrada de 1656 nuevos casos de hombres y 832 nuevos casos del sexo femenino.

La tasa de contagio para hombres es 0,00039999 y la de mujeres es de 0,000200334. La probabilidad de muerte natural para los hombres es de 0.00368374 y en las mujeres 0.003053174 y la de muerte por la enfermedad para los hombres es de 0.00108814 y en las mujeres 0.000120393.

La primera fila de la matriz de transición para los hombres es:

$$(0; 99591627 \ 0; 00039999 \ 0; 00368374 \ 0)$$

y en las mujeres:

$$(0; 996746492 \ 0; 000200334 \ 0; 003053174 \ 0).$$

Se ha tomado valor 0 para la probabilidad de morir inicialmente por la enfermedad, tanto para hombres como para mujeres y la probabilidad de mantenerse susceptibles se calcula de la condición de la matriz de transición:

$$\alpha = 1 - \gamma - \mu$$

La segunda fila de la matriz de transición para hombres es:

$$(0 \ 0; \ 99522812 \ 0; \ 00368374 \ 0; \ 00108814)$$

y para el estudio de las mujeres:

$$(0 \ 0; \ 996826433 \ 0; \ 003053174 \ 0; \ 000120393)$$

El primer elemento es cero pues la probabilidad de volver a ser susceptible dado que se está infectado en el VIH/SIDA es 0 y la probabilidad de mantenerse infectado se calcula por la relación:

$$\beta = 1 - \mu - \epsilon$$

Entonces la matriz de transición inicial para los hombres es:

$$\begin{bmatrix} 0,99591627 & 0,00039999 & 0,00368374 & 0 \\ 0 & 0,99522812 & 0,00368374 & 0,00108814 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y para las mujeres es:

$$\begin{bmatrix} 0,996746496 & 0,0002000334 & 0,003053174 & 0 \\ 0 & 0,996826433 & 0,003053174 & 0,000120393 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El interés es el de observar la evolución de las probabilidades involucradas en la matriz de transición al paso del tiempo, para ello utilizamos la potencia de la matriz de transición:

T<sup>2</sup>=

$$\begin{bmatrix} 0,991849216850713 & 0,00079643744556 & 0,007353910059612 & 0,000000435245119 \\ 0 & 0,990479010838734 & 0,007349901634769 & 0,002171087526497 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La probabilidad de que un hombre susceptible en el momento inicial (2020) esté infectado dos años después es de 0.00079644, lo que significa que habrá aproximadamente 796 nuevos casos por millón de habitantes, y la probabilidad de morir por la enfermedad aumenta a 0.002171087526497.

Al paso de 5 años se obtuvo,

$$T^5 = \begin{bmatrix} 0,979747438859025 & 0,001964763480832 & 0,018283483624464 & 0,000004314035679 \\ 0 & 0,976367224380326 & 0,0018243753166722 & 0,005389022452952 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En general, la probabilidad de mantenerse susceptible disminuye, al igual que la de mantenerse infectado y la probabilidad de contagio, de morir por la enfermedad y por causas naturales aumentan al paso del tiempo, dado que no se tiene ninguna estrategia de control.

Partiendo del vector de prevalencias iniciales es  $v = (4124938; 15146; 15251; 4505)$ , donde cada componente representa la cantidad de individuos en cada compartimento entonces, el número de sujetos en cada uno de los estados de la enfermedad dentro de  $n$  años viene dado por el producto del vector  $v$  por la matriz de transición en  $n$  tiempos, o sea  $vT^n$ .

Tiempo	Susceptibles	%	Infectados	%	Mortalidad	Letalidad	%
n=2	4091316	(-)0.81 %	18287	(+)20.7 %	45696	4539	(+)0.75 %
n=5	4041397	(-)2.025 %	22892	(+) 51 %	90945	4604	(+)2.20 %
n=10	3959549	(-)13.7 %	30291	(+) 99 %	165254	4743	(+) 5.32 %

**Cuadro 2.1:** Comportamiento de los Hombres al paso del Tiempo

Como se ilustró para 2 y 5 años que la cantidad de susceptibles disminuye, la cantidad de infectados aumentan a gran escala y la muerte por la enfermedad aumenta aunque no significativamente, esto conlleva a la necesidad de aplicar una estrategia de control, (Cuadro 2.3).

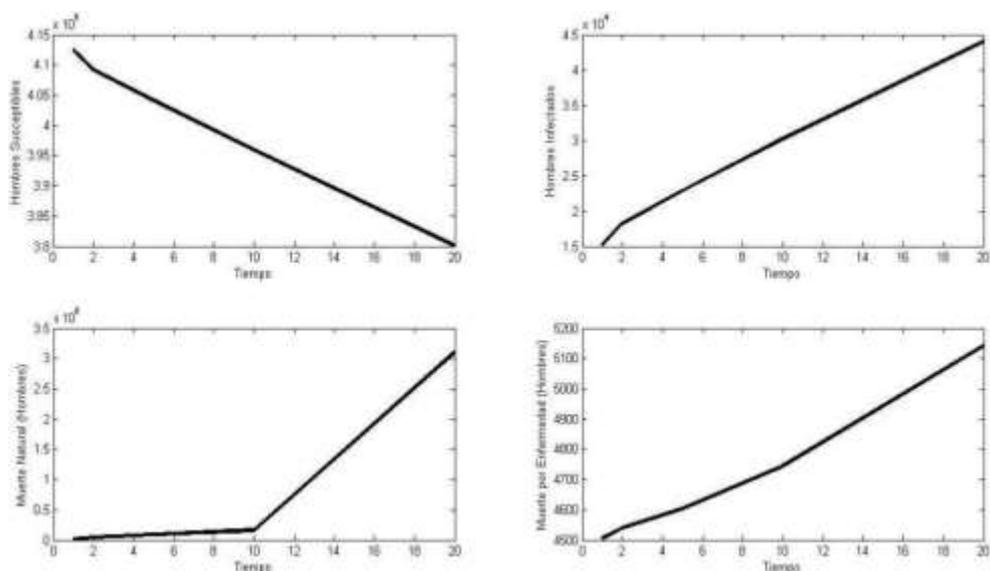
De forma gráfica este comportamiento se puede ver:

Para la población femenina, al paso de 2 años, se obtiene la matriz de transición:

$T^2=$

0,993504168558387	0,000398781230466	0,006097026128526	0,000000024082621
0	0,993662937527513	0,006096658547748	0,000240403924748
0	0	1	0
0	0	0	1

La probabilidad de que una mujer susceptible en el momento inicial (2020) esté infectada dos años después es de 0,00039878123, lo que equivale a afirmar que habrá aproximadamente 399 nuevos casos por millón de habitantes, y la probabilidad de morir por la enfermedad es de 0.000240404.



**Figura 2.3:** Comportamiento de los Hombres

$T^5=$

0,983839452844949	0,0000987373140660	0,015172934737189	0,000000239282213
0	0,984232561155218	0,015169282491114	0,000598156353668
0	0	1	0
0	0	0	1

En general, las probabilidades de mantenerse en los estados Susceptible e Infectado disminuye, sin embargo, como no existe estrategia de control, aumentan las probabilidades de pasar de Susceptible a Infectado y de morir tanto por causas naturales como por la enfermedad.

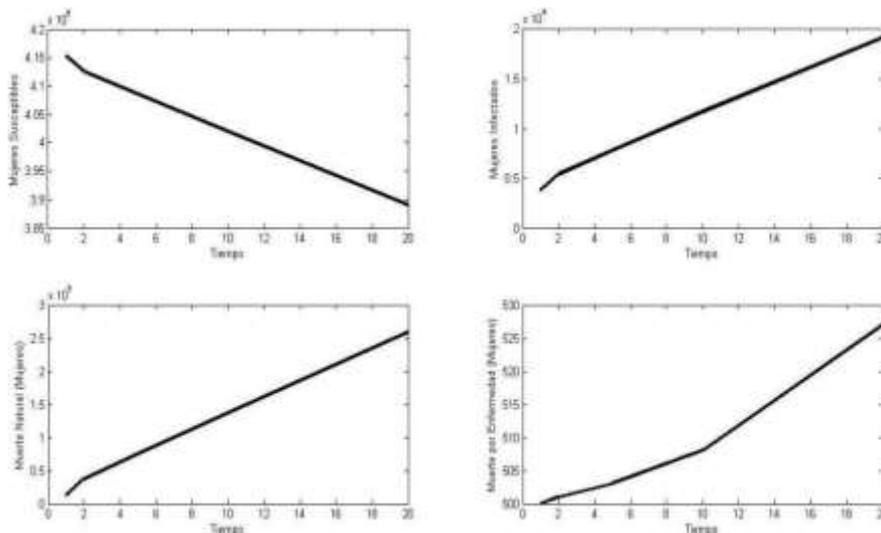
Para el vector inicial de prevalencia  $v = (4149267; 3788; 12680; 500)$ , haciendo  $vT^n$ , se puede observar el comportamiento de estas cantidades al paso del tiempo (n).

Al paso del tiempo, la cantidad de mujeres susceptibles disminuye, la cantidad de infectadas aumenta notablemente y la muerte por la enfermedad aumenta, pero en menor proporción que los hombres. Esto sugiere la posibilidad de aplicar una estrategia de control.

Tiempo	Susceptibles	%	infectadas	%	Mortalidad	Letalidad	%
n=2	4126077	(-)0.64 %	5420	(+)43 %	38024	501	(+)0.2 %
n=5	4085939	(-)1.62 %	7828	(+) 106 %	75751	503	(+)0.6 %
n=10	4019908	(-)3.20 %	11739	(+) 209,9 %	137865	508	(+) 1.6 %

**Cuadro 2.2:** Comportamiento de los Mujeres al paso del Tiempo

Las siguientes gráficas ilustran el comportamiento de las mujeres:



**Figura 2.4:** Comportamiento de las Mujeres

### 2.2.1. Estrategias de Control

La estrategia de control va encaminada a reducir la transmisión de la epidemia, para ello definimos  $S_1$  como la efectividad lograda en la reducción de la transmisión de la epidemia. Esto se refleja en la siguiente matriz de transición:

$$\begin{bmatrix} 0 & (1-S_1)\gamma & \mu & 0 \\ 0 & \beta & \mu & \epsilon \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Según los resultados obtenidos para el año 2022, se tendrían 23707 infectados, siendo 18287 hombres y 5420 mujeres, Ecuador reportó para esa fecha 20024, 16420 hombres y 3604 mujeres, lo que significa una reducción del 11.4% en los hombres y 50,4% en las mujeres respecto a lo que reporta el modelo. En las muertes por la enfermedad fueron 3809, 503 mujeres y 3466 hombres, lo que evidencia una disminución de 47% en las mujeres y de 31% en los hombres respecto al modelo presentado.

La idea es presentar una estrategia de decisión basada en la efectividad que debe alcanzar el control con el fin de reducir la epidemia al paso de 10 años.

Después de realizada la experimentación computacional con el objetivo de obtener el menor valor de efectividad, se presentan los resultados para  $S_1 = 0;4$  y  $S_1 = 0;6$  para el caso del control en los hombres, que fueron propuestos por los especialistas.

Para un control con efectividad de 40 %, o sea  $S_1 = 0;4$ , la matriz de transición es:

$$T = \begin{bmatrix} 0,996076266 & 0,000239994 & 0,00368374 & 0 \\ 0 & 0,99522812 & 0,00368374 & 0,00108814 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Al paso de 2, 5 y 10 años respectivamente, se obtienen la siguiente información:

$T^2=$

$$\begin{bmatrix} 0,99216792276885 & 0,000477901104814 & 0,007353910059612 & 0,000000261147071 \\ 0 & 0,990479010838734 & 0,007349901634769 & 0,002171087526497 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$T^5=$

$$\begin{bmatrix} 0,9805344683983369 & 0,001179237183189 & 0,0182834899996875 & 0,000002588836567 \\ 0 & 0,976367224380326 & 0,018243753166722 & 0,005389022452952 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$T^{10}=$

$$\begin{bmatrix} 0,961448266494366 & 0,002307651494196 & 0,036232599795169 & 0,000011482216270 \\ 0 & 0,953292956844142 & 0,036056355808395 & 0,010650687347464 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Partiendo del vector de prevalencias iniciales  $v = (4124938; 15146; 15251; 4505)$  se obtuvo el siguiente comportamiento:

Tiempo	S	I	N	E
2	4092631	16973	45696	4539
5	4044645	19652	90945	4597
10	3965914	23957	165254	4713

**Cuadro 2.1:** Comportamiento de la Población

Para un control del 60% de efectividad se obtuvieron las siguientes matrices:

$T^2=$

$$\begin{bmatrix} 0,992327302306438 & 0,000318613535902 & 0,007353910059612 & 0,000000174098047 \\ 0 & 0,990479010838734 & 0,007349901634769 & 0,002171087526497 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$T^5=$

0,980928496269603	0,000786284517485	0,018283493183463	0,000001726029448
0	0,976367224380326	0,018243753166722	0,005389022452952
0	0	1	0
0	0	0	1

$T^{10} =$

0,962220714793745	0,001538991321287	0,036232637439130	0,000001726029448
0	0,953292956844142	0,036056355808395	0,010650687347464
0	0	1	0
0	0	0	1

El comportamiento de los elementos de la dinámica es:

Tiempo	S	I	N	E
2	3969101	20786	45696	4538
5	4046269	18031	90945	4593
10	3965914	20786	165254	4697

**Cuadro 2.2:** Comportamiento de la Población

Tiempo	Sin control	S1= 0,4	S1= 0,6
2	0.000796437844556	0.000477901104814	0.000318613535902
5	0.001964763480832	0.001179237183189	0.000786284517485
10	0.003843302654603	0.002307651494196	0.001538991321287

**Cuadro 2.3:** Comportamiento de  $\gamma$  Con y Sin Control

Los resultados muestran que al paso del tiempo con ambas estrategias de control se reduce la probabilidad de transmisión. Esto influye, en que se mantengan más personas en la subpoblación de susceptibles, se reduzca la cantidad de infectados y las muertes por enfermedad, factores esenciales en la dinámica del sistema.

Teniendo en cuenta los datos reportados para los años en estudio, en Ecuador se logró una efectividad de aproximadamente el 49% sobre la probabilidad de transmisión.

Tiempo	Sin control	Control de 40%	Control de 60%
2	4091316	40926311	4093288
5	4041397	4044645	4046269
10	3959549	3965914	3969101

**Cuadro 2.4:** Comportamiento de Susceptibles

Tiempo	Sin control	Control de 40%	Control de 60%
2	18287	16973	16316

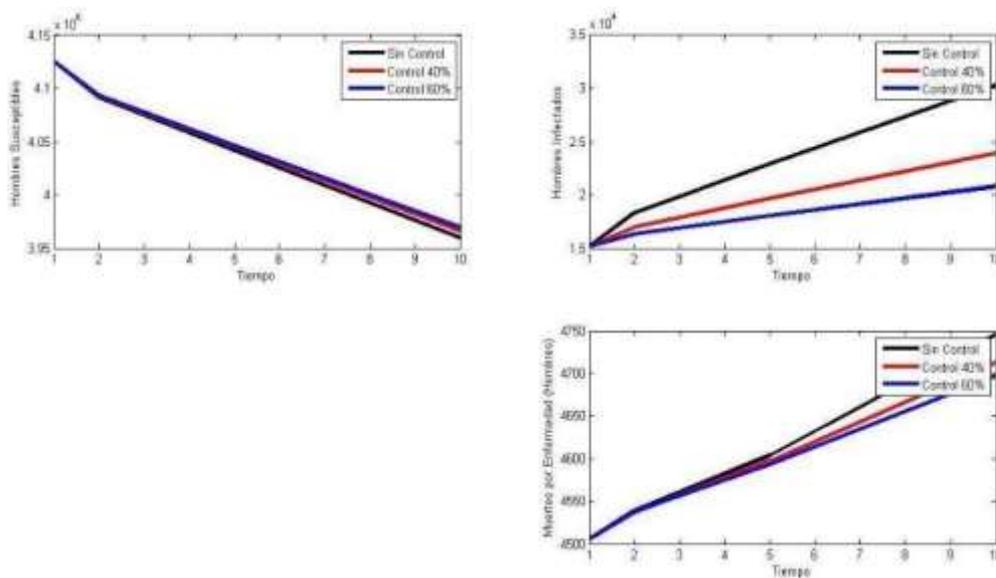
5	22892	19652	18031
10	30291	23957	20786

**Cuadro 2.5:** Comportamiento de Infectados

Tiempo	Sin control	Control de 40%	Control de 60%
2	4539	4537	4537
5	4604	4597	4593
10	4745	4713	4697

**Cuadro 2.6:** Muertes por la Enfermedad

Al aplicar en nuestras simulaciones, un control del 60% (valor factible en la opinión de los especialistas), se puede reducir significativamente la epidemia, según se muestra en las gráficas siguientes:



**Figura 2.5:** Comparación de Controles (Hombres)

En el estudio sobre las mujeres, se manejaron controles de efectividad de 25% y 50%. Para el caso del 25% se obtuvieron los siguientes resultados para los subsiguientes 2 y 10 años, a partir de la matriz inicial de transición:

$$T = \begin{bmatrix} 0,99679680095 & 0,00015002505 & 0,003053174 & 0 \\ 0 & 0,993662937527513 & 0,006096658547748 & 0,000240403924748 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$T^2=$

$$\begin{bmatrix} 0,993603862384154 & 0,000299093425355 & 0,006097026128526 & 0,000000018061966 \\ 0 & 0,993662937527513 & 0,006096658547748 & 0,000240403924748 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$T^{10}=$

$$\begin{bmatrix} 0,968425809345683 & 0,001457745123780 & 0,030115646448216 & 0,0000007990082321 \\ 0 & 0,993662937527513 & 0,006096658547748 & 0,000240403924748 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El comportamiento de los elementos de la dinámica con vector de prevalencia inicial

$v = (4149267; 3788; 12680; 500)$  es:

Ti empo	S	I	N	E
2	4126491	5006	38024	501
5	4086964	6804	75751	503
10	40219256	9723	137865	507

**Cuadro 2.7:** Comportamiento de la Población

Para el caso de 50% de efectividad se obtuvieron los siguientes resultados:

$T =$

$$\begin{bmatrix} 0,9968468093 & 0,0001000167 & 0,003053174 & 0 \\ 0 & 0,993662937527513 & 0,006096658547748 & 0,000240403924748 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$T^2=$

0,9933703561211591	0,000199400618573	0,006097026128526	0,000000012091311
0	0,993662937527513	0,006096658547748	0,000240403924748
0	0	1	0
0	0	0	1

$T^{10}=$

0,968911769088843	0,000972049500985	0,030115648617561	0,000000532792611
0	0,968713734438160	0,030099384248231	0,001186881313609
0	0	1	0
0	0	0	1

El comportamiento de los elementos de la dinámica para el vector de prevalencia inicial  $v = (4149267; 3788; 12680; 500)$  es:

Tiempo	S	I	N
2	4126905	4592	501
5	4087989	5778	503
10	4023944	7706	507

**Cuadro 2.8:** Comportamiento de la Población

El comportamiento de la probabilidad de transmisión y los valores de las principales variables de la dinámica, se muestra en las tablas siguientes:

Tiempo	Sin control	S1= 0,25	S1= 0,6
2	0.000398781230466	0.000299093425355	0.000199400618573
5	0.000987373140660	0.000875452123123	0.000493785648473
10	0.001943221445508	0.001457745123780	0.000972049500985

**Cuadro 2.9:** Comportamiento de  $\gamma$  Con y Sin Control

Tiempo	Sin control	Control de 25%	Control de 50%
2	4126077	4126491	4126905
5	4085939	4086964	4087989
10	4019908	4021927	4023944

**Cuadro 2.10:** Comportamiento de Susceptibles

Tiempo	Sin control	Control de 25%	Control de 50%
2	5420	5006	4592
5	7828	6804	5778
10	11739	9723	7706

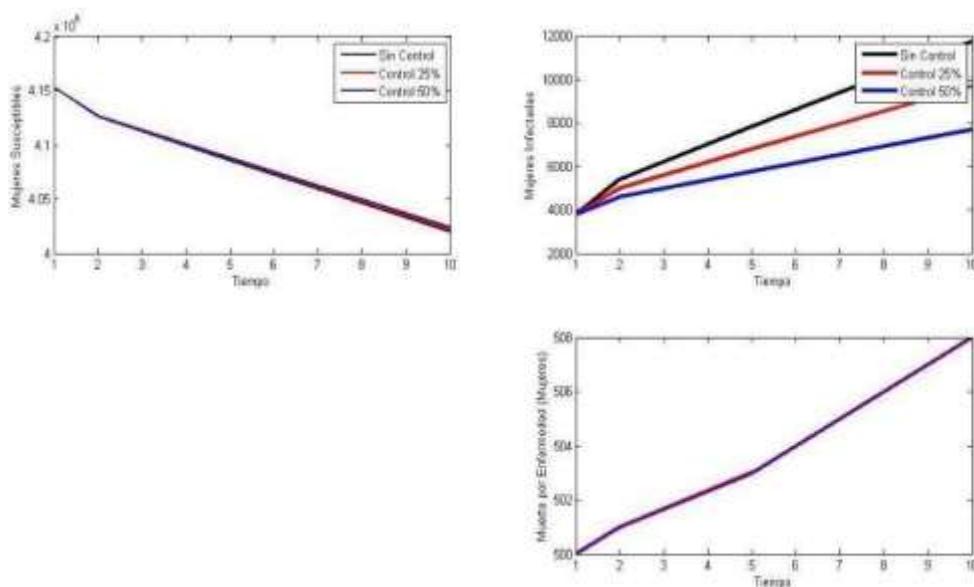
**Cuadro 2.11:** Comportamiento de Infectados

Tiempo	Sin control	Control de 25%	Control de 50%
2	501	501	501
5	503	503	503
10	508	507	507

**Cuadro 2.12:** Muertes por la Enfermedad

En resumen, la probabilidad de transmisión se reduce al paso del tiempo, con mayor resultado si el control aplicado tiene mayor efectividad, la cantidad de susceptibles aumenta, pero aún se debe lograr mayor efectividad para obtener un mayor aumento, las muertes por la enfermedad se mantienen sin cambios aunque se aplique control.

De forma gráfica se puede observar el comportamiento:



**Figura 2.6:** Comparación de Controles (Mujeres)

### 2.3. Modelo de Estrategia de Control con Ecuaciones Diferenciales

Para controlar el contagio por vía sexual se definen dos métodos fundamentales [7]:

- ✓ **Métodos Naturales:** La abstinencia o no práctica de sexo, esta puede ser periódica o la pareja se abstiene de tener sexo en los días fértiles, que es la única manera 100% segura de prevenir el embarazo y las Infecciones de Transmisión Sexual (ITS).
- ✓ **Métodos no Naturales:** Uso de preservativos, que se pueden utilizar en el sexo vaginal, anal y oral.

En el modelo, la estrategia de control queda reflejada en la ponderación de los parámetros, o sea los coeficientes,  $S_1$  y  $S_2$ , que denotan el control sobre  $\gamma$  (tasa de contagio entre hombres), y sobre  $m_1$  (tasa de contagio de mujeres susceptibles con hombres infectados).

Modelo:

$$\frac{dx_h}{dt} = \delta H_{ns} - (1 - S_1)\gamma c_1 y_h x_h - m_2 c_3 y_m x_h - (\eta + T_1)x_h$$

$$\frac{dx_m}{dt} = \delta M_{ns} - (1 - S_2)m_1 c_2 y_h x_m - (\eta + T_2)x_m$$

$$\frac{dy_h}{dt} = (1 - S_1)\gamma c_1 y_h x_h + m_2 c_3 y_m x_h + \eta x_h - (\epsilon + T_1)y_h$$

$$\frac{dy_m}{dt} = (1 - S_2)m_1 c_2 y_h x_m + \eta x_m - (\mu + T_2)y_m$$

Condiciones iniciales:

$$t \in [0, n]$$

$$x_h(0) = x_{h0},$$

$$x_m(0) = x_{m0},$$

$$y_h(0) = y_{h0},$$

$$y_m(0) = y_{m0}.$$

### 2.3.1. Existencia y Unicidad de la Solución

Utilizamos la variante del teorema de existencia y unicidad para modelos epidemiológicos.

Sea  $F(x) = (F_1(x), F_2(x), F_3(x), F_4(x))$  donde  $x = (x_h, x_m, y_h, y_m)$

$$F_1(x) = \delta H_{ns} - (1 - S_1)\gamma c_1 y_h x_h - m_2 c_3 y_m x_h - (\eta + T_1)x_h$$

$$F_2(x) = \delta M_{ns} - (1 - S_2)m_1 c_2 y_h x_m - (\eta + T_2)x_m$$

$$F_3(x) = (1 - S_1)\gamma c_1 y_h x_h + m_2 c_3 y_m x_h + \eta x_h - (\epsilon + T_1)y_h$$

$$F_4(x) = (1 - S_2)m_1c_2y_hx_m + \eta x_m - (\mu + T_2)y_m$$

$x_h, x_m, y_h, y_m$  Son continuas y positivas por definición del modelo epidemiológico.

$\therefore F_1, F_2, F_3$  y  $F_4$  son funciones continuas y diferenciables (son combinación de funciones elementales).

Analicemos la continuidad de las derivadas parciales de cada función,

$$F_1(x) = \delta_h H_{ns} - (1 - S_1)\gamma c_1 y_h x_h - m_2 c_3 y_m x_h - (\eta + T_1)x_h$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_h} = -(1 - S_1)\gamma c_1 y_h - m_2 c_3 y_m - (\eta + T_1)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_m} = 0$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y_h} = -(1 - S_1)\gamma c_1 x_h$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y_m} = -m_2 c_3 x_h$$

$$F_2(x) = \delta_m M_{ns} - (1 - S_2)m_1c_2y_hx_m - (\eta + T_2)x_m$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_h} = 0$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_m} = -(1 - S_2)m_1c_2y_h - (\eta + T_2)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y_h} = -(1 - S_2)m_1c_2x_m$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y_m} = 0$$

$$F_3(x) = (1 - S_1)\gamma c_1 y_h x_h + m_2 c_3 y_m x_h + \eta x_h - (\epsilon + T_1)y_h$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial x_h} = (1 - S_1)\gamma c_1 y_h + m_2 c_3 y_m + \eta$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial y_h} = (1 - S_1)\gamma c_1 x_h - (\epsilon + T_1)$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial y_m} = m_2 c_3 x_h$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial y_m} = 0$$

$$F_4(x) = (1 - S_2)m_1 c_2 y_h x_m + \eta x_m - (\mu + T_2)y_m$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial x_m} = (1 - S_2)m_1 c_2 y_h + \eta$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial y_m} = -(\mu + T_2)$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial x_h} = 0$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial y_h} = (1 - S_2)m_1 c_2 x_m$$

∴ Todas las funciones y sus derivadas parciales son continuas.

∴  $F$  localmente Lipschitz continúa.

Además se cumple:

$$\blacksquare F_1(0, x_m, y_h, y_m) = \delta_h H_{ns} > 0$$

$$x_m, y_h, y_m > 0.$$

$$\blacksquare F_2(x_h, 0, y_h, y_m) = \delta_m M_{ns} > 0$$

$$x_h, y_h, y_m > 0.$$

$$\blacksquare F_3(x_h, x_m, 0, y_m) = (m_2 c_3 y_m + n) x_h > 0$$

$$x_h, x_m, y_m > 0.$$

$$F_4(x_h, x_m, y_h, 0) = ((1 - S_2)m_1 c_2 y_h + n) x_m > 0$$

$$x_h, y_h, x_m > 0.$$

∴ Existe y es única la solución por el Teorema de Existencia y Unicidad en su variante epidemiológica.

### 2.3.2. Experimentación Computacional

Manteniendo los mismos valores de los parámetros utilizados en el modelo sin control, se presentan dos posibles escenarios de estrategias de control (I, II), utilizando para los controles, los valores obtenidos del estudio estocástico, ver Cuadro 2.17.

Control	I	II	
$s_1$	0.6	0.6	0.4
$s_2$	Sin Control (0)	0.25	0.5

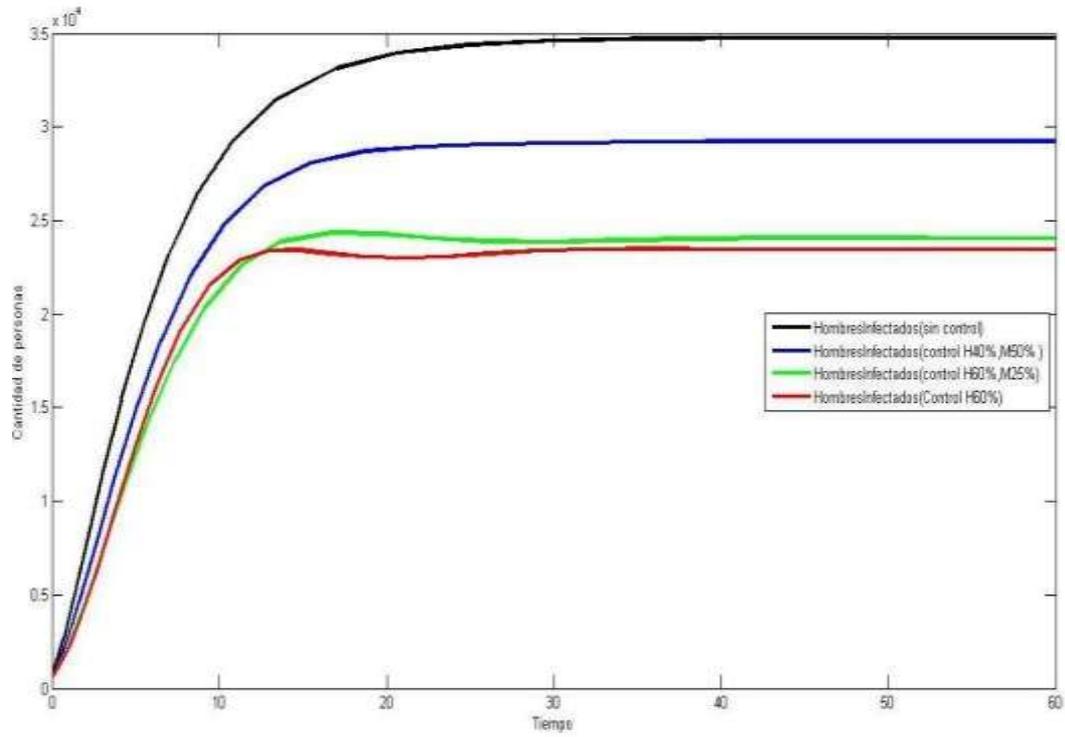
**Cuadro 2.1:** Valores del Control

#### Resultados:

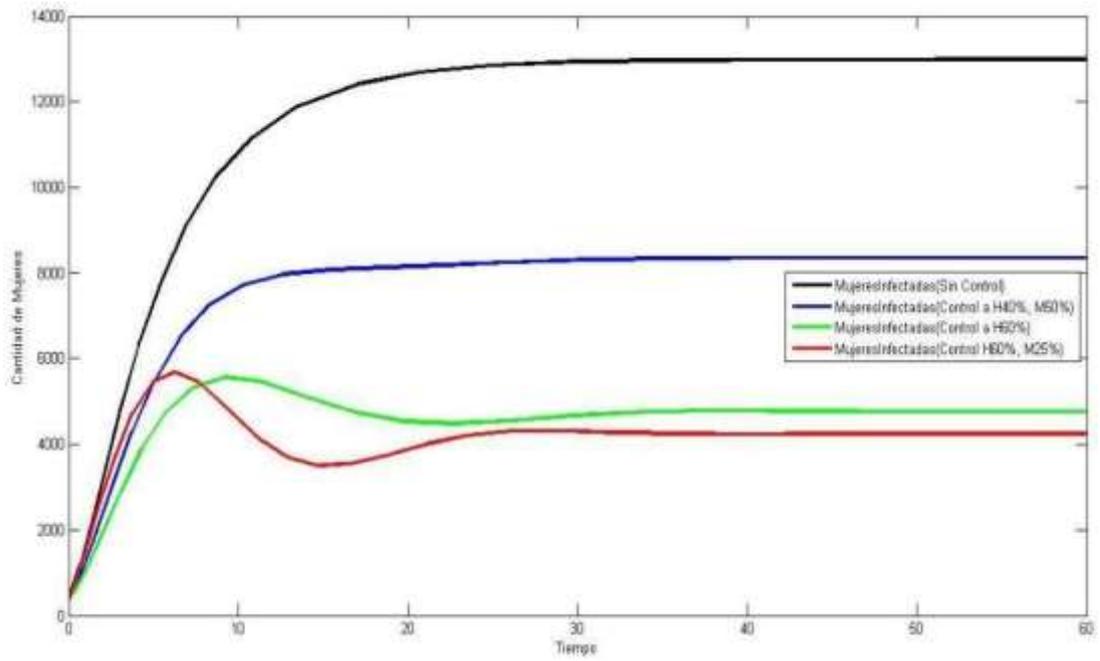
Según los resultados obtenidos en los primeros 12 años, la mejor estrategia se logra para una eficacia del 60 % sobre el contacto entre hombres y 25 % en los contactos entre hombre infectado y mujer susceptible, pues se reduce la cantidad de infectados que son los de mayor crecimiento en la dinámica. Al paso del tiempo se logra una mayor disminución al aplicar solo control sobre los contactos entre hombres con una efectividad del 60 %, esto evidencia la importancia e influencia de este tipo de relación en la dinámica de contagio. Ver Figura [2.7].

En las mujeres en los primeros 10 años el mejor resultado se logra con 60 % sobre  $s_1$  y 25 % sobre  $s_2$ , como se ilustra en la Figura [2.8].

Según el estudio realizado, el mayor impacto de la epidemia es sobre los hombres infectados. Una estrategia eficiente para reducir la epidemia en el tiempo, debe lograr una eficacia no menor del 60 % sobre  $s_1$ , que puede combinarse con una eficacia del 25 % sobre  $s_2$ .



**Figura 2.7: Hombres Infectados**



**Figura 2.8: Mujeres Infectadas**

## **Conclusiones del Capítulo**

- La utilización del Método de Expertos permitió corroborar el valor científico-metodológico del modelo matemático y la estrategia de control.
- Se realiza un estudio de la probabilidad de transmisión de estas epidemias con uso de la matriz de transición en una cadena de Markov y se proponen estrategias de control para reducir esta probabilidad.

## CAPÍTULO III

### VALORACIÓN DEL NIVEL TEÓRICO Y DE FACTIBILIDAD DE LA METODOLOGÍA

En este tercer capítulo se presentan los resultados relacionados con la propuesta de solución donde se describen los algoritmos predecesores al desarrollado en este trabajo. Se aplica el Método de Experto para corroborar el valor científico metodológico, a partir de dos etapas: determinación de los expertos y la valoración de la Metodología.

#### 3.1 PRIMERA ETAPA: Determinación de los expertos.

En esta etapa se procede a explicar la aplicación del Método de Experto, para la valoración de los indicadores y de la Metodología. Respecto a este método, la investigadora N. Oñate (1988), expresó que “el Método Delphi es la utilización sistemática del juicio intuitivo de un grupo de expertos para obtener un consenso de opiniones informadas;” ver. [19].

La esencia del método en cuestión es que los expertos expongan sus criterios sin consultarse e incluso sin conocerse entre sí, con una secuencia metodológica ordenada en varias rondas de encuestas, donde la primera obtiene la valoración estadística, la segunda informa a los expertos la distribución de las respuestas, permitiéndoles modificar sus opiniones con argumentos que las justifiquen y las siguientes comunican los criterios de la ronda anterior para que los expertos reconsideren sus valoraciones.

Con relación a las rondas, la investigadora N. Oñate (1988), opina que “la mayoría de los autores consideran que a partir de la tercera o cuarta ronda los expertos comienzan a mantener sus criterios;” ver. [19].

Con la información obtenida en cada ronda, se realiza entonces un procesamiento estadístico-matemático para dar objetividad a los criterios subjetivos de los expertos, esto es algo que diferencia el Método Delphi del resto de los métodos de pronóstico subjetivo, pues la decisión final es un criterio avalado fuertemente por la experiencia de los expertos y por indicadores objetivos.

La fase de valoración en nuestra investigación se desarrolla en dos etapas: la primera, dedicada a la determinación de un conjunto de posibles especialistas a considerar

como expertos para la Metodología y la segunda etapa, la constituyó la consulta a los expertos así seleccionados.

No se emplearon los métodos clásicos para la valoración de expertos como el Delphi, sino las ideas propuestas por L. Campistrous (1998) y C. Rizo (1998), del Instituto Central de Ciencias Pedagógicas de Cuba. En este trabajo los autores "proponen un Método que utiliza algunas de las características del Método Delphi"(Campistrous & Rizo, 1998: 12), pero que brinda una mayor objetividad a los criterios de los especialistas seleccionados a partir de los pasos siguientes:

- Selección de los expertos.
- Determinación de un grupo de indicadores que permita medir la pertinencia del procedimiento propuesto para la solución del problema de investigación.
- confección de una escala para medir los indicadores.
- confección de una encuesta para obtener los criterios de los expertos.
- Procesamiento estadístico de la información obtenida.
- Análisis de los resultados.
- No recomienda repetir varias veces las consultas para buscar concordancia porque pueden distorsionarse los criterios verdaderos.

Es importante tener en cuenta el criterio expresado por L. Campistrous (1998), cuando señala que:

Al utilizar el Método de Expertos como procedimiento empírico (...) estamos depositando gran parte de la confiabilidad del proceso en los hombros de los expertos que se seleccionen. Esto significa que la calidad de nuestro trabajo depende en gran medida de la calificación de los expertos que seleccionemos; ver [6].

Los autores antes citados refieren la conveniencia de seleccionar el número mayor posible de expertos y de valorar los elementos estudiados con no menos de 30

especialistas que estudian el tema, o tienen experiencia práctica o investigan sobre los aspectos que integran esta metodología.

Se escogieron treinta y seis posibles expertos, los cuales fueron valorados según la metodología propuesta para su determinación como expertos; considerándose un mínimo de experiencia profesional en la temática que se investiga y la existencia de determinada información teórica en relación con la misma (VER ANEXO # 1).

De acuerdo con la metodología utilizada, se denota por Kc el Coeficiente de conocimiento del experto sobre el problema que se analiza, determinado este a partir de su propia valoración. Para obtenerlo se solicita al experto que valore su conocimiento sobre el problema en una escala de cero a diez.

En esta escala el cero representa la ausencia de conocimiento acerca del tema y el diez una información completa sobre el mismo. De acuerdo con su autovaloración, el sujeto ubica su conocimiento en algún punto de esta escala y el resultado se multiplica por 0,1 para llevarlo a la escala de 0 a 1.

En la tabla 3.1 se muestra el Coeficiente de conocimiento acerca del tema:

Kc	1	0.8	0.6	0.4	0.2
Cantidad de personas	13	8	7	2	-

**Tabla 4.1:** Resumen del Coeficiente de conocimiento Kc.

Teniendo en cuenta los valores de Kc en la tabla 3.1 se precisan los siguientes intervalos para saber el grado de influencia:

- Alto:  $0,9 \leq kc \leq 1$
- Medio:  $0.8 < kc \leq 0.6$
- Bajo:  $kc \leq 0.5$

En la población de los 30 expertos seleccionados y evaluados se obtuvieron los siguientes resultados: 13 presentaron un coeficiente de conocimiento alto (43,3%), 15 un coeficiente de conocimiento medio (50%) y dos un coeficiente de conocimiento bajo para un (6,66 %). De los 30 expertos seleccionados, 18 son Doctores en Ciencias que representan el 60%, 12 son Máster que representan el 40%, de ellos 10 son Profesores Titulares y 12

son Profesores Auxiliares, el resto son Asistentes. El 33,3% de los especialistas tiene más de 10 años de experiencia y el 66,6% tiene más de 20 años.

Se denota por Ka el Coeficiente de argumentación que trata de estimar, a partir del análisis del propio experto, el grado de fundamentación de sus criterios. Para determinar este coeficiente se le pide al experto que indique el grado de influencia (alto, medio o bajo) que tiene en sus criterios cada una de las siguientes fuentes: análisis teóricos realizados por él mismo, su experiencia, los trabajos de autores extranjeros, su conocimiento del estado del problema y su intuición.

Las respuestas dadas por el experto se valoran de acuerdo a una "tabla preestablecida" (Campistrous & Rizo, 1998: 19). Según los datos que aporta esta tabla, los análisis teóricos realizados por el experto y su propia experiencia en la temática, son las fuentes de argumentación cruciales para determinar la conveniencia del experto en el proceso de valoración.

En la tabla 3.2 se muestra el Coeficiente de argumentación:

Ka	1	0.9	0.8	0.7	0.5	0.4
Cantidad de personas	18	9	3	-	-	-

**Tabla 4.2:** Resumen del Coeficiente de argumentación Ka.

Luego para la determinación de los criterios de alto, medio y bajo se utilizó la escala Kc (VER ANEXO # 2). De estos resultados se puede inferir que, de los 30 expertos seleccionados, 27 tienen un coeficiente de argumentación alto que representan el 90% y 3 expertos con un coeficiente de argumentación medio para un 10%.

Para hacer objetiva la selección de los expertos se empleó un procedimiento basado en los criterios autovalorativos de estos. Denominamos a ese criterio Coeficiente autovalorativos y lo denotamos simbólicamente por k. Para el mismo se tomó en cuenta la autoevaluación de los posibles expertos acerca de su competencia y de las fuentes que les permiten argumentar sus criterios.

El coeficiente K se conforma a partir de otros dos coeficientes antes definidos Kc y Ka, mediante la siguiente fórmula:

$$K = \frac{1}{2} (K_c + K_a)$$

El coeficiente K puede alcanzar valores comprendidos entre 0,25 (mínimo posible) y 1 (máximo posible). En realidad, los valores obtenidos aportan un criterio de significación para decidir si el experto debe ser incluido en el proceso de valoración (VER ANEXO # 3). Una vez calculado K para cada uno de los 36 posibles expertos a los que se les aplicó la encuesta, se seleccionaron lo que se encontraban en un límite inferior  $K = 0,5$ . Fueron seleccionados 30 (VER ANEXO # 4).

La media aritmética grupal para las mediciones de K resultó ser 0,83, lo cual evidencia la alta utilidad de los criterios valorativos de los sujetos encuestados y de la Metodología propuesta teniendo en cuenta que:

- Si  $0,8 < K < 1,0$ , el Coeficiente de competencia es alto.
- Si  $0,6 < K < 0,8$ , el Coeficiente de competencia es medio.
- Si  $K < 0,5$  el Coeficiente de competencia es bajo.

Es importante señalar que los sujetos encuestados mostraron disposición real de colaborar en el trabajo, buena capacidad de análisis, creatividad y un elevado espíritu crítico y autocrítico. El criterio seguido para la selección de los expertos fue considerar aquellos que tuvieran un coeficiente de competencia alto o medio, por tanto cumplieron con este criterio 30 de los encuestados.

En la tabla que aparece en el ANEXO # 4, se muestran los coeficientes  $K_c$ ,  $K_a$  y el K resultante de cada uno de los 30 expertos consultados. Como resultado de la aplicación de este procedimiento se obtuvo que 23 de los encuestados poseen un nivel de competencia alto (76,6 %) y siete poseen un nivel de competencia medio (23,3 %).

### **3.2 SEGUNDA ETAPA: Valoración de la Metodología.**

Para el procesamiento estadístico de los datos se aplicó el modelo de Torgerson (Campistrous & Rizo, 1998), utilizando como medio una hoja Excel soportada en Windows. Se elaboró una escala para efectuar la valoración integral.

De hecho, para la valoración de los expertos, se incluyeron los siguientes indicadores (VER ANEXO # 5):

1. Contribución para detectar sólo la población sexualmente activa dividida en cuatro clases disjuntas  $xh(m)$ : hombres (mujeres) susceptibles (no portadores del virus) y  $yh(m)$  hombres (mujeres) infectadas (portadores de la enfermedad).
2. Pertinencia de la ecuación que representa el comportamiento de las mujeres susceptibles( $xm$ ) en el tiempo.
3. Pertinencia de la ecuación que representa la variación en el tiempo de los hombres infectados ( $yh$ ).
4. Posibilidades de modelar mediante el sistema de ecuaciones diferenciales la dinámica de transmisión del VIH/SIDA.
5. Influencia del teorema de existencia y unicidad para modelos epidemiológicos.
6. Contribución para la experimentación de las aplicaciones de la cadena de Markov con los estados S: susceptible, I: infectado, N: muerte natural y E: muerte por la enfermedad.
7. Posibilidad del modelo matemático para interpretar los datos, realizar predicciones de casos y evaluar diferentes acciones para tomar decisiones que permita contener la epidemia.
8. Influencia de la estrategia de control para reducir la probabilidad de transmisión.

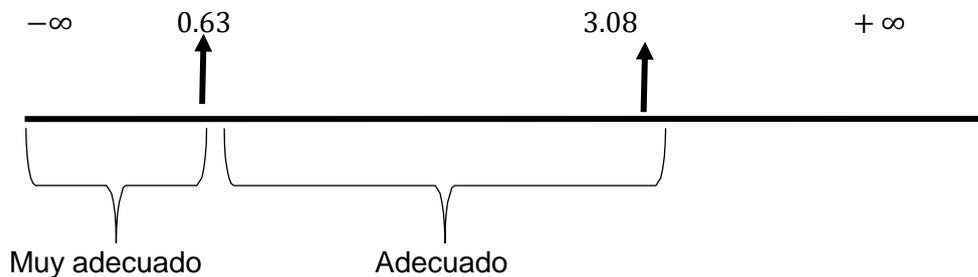
A continuación se resumen los resultados para cada categoría según la opinión de los 30 expertos encuestados utilizando tablas de matriz de frecuencias y la tabla de matriz de frecuencias acumuladas que se muestran en el ANEXO # 6.

En los resultados de la tabla de matriz de frecuencias se obtuvieron los valores de frecuencias acumuladas para cada uno de los indicadores evaluados. Seguidamente se obtuvo una tabla de matriz de frecuencias acumuladas similar (ANEXO # 6), donde se resumen los resultados de los valores de frecuencia relativa acumulativa para los indicadores que están siendo evaluados.

El siguiente paso consistió en obtener los valores de la desviación normal estándar inversa a partir de los resultados de las frecuencias relativas acumulativas. Se observa que

en este último paso mencionado la cantidad de categorías de la encuesta se ha reducido a dos, lo que posibilita delimitar dos intervalos para evaluar la categoría a la que pertenece cada indicador según la opinión de los expertos.

A partir de la evaluación de los puntos de corte y su comparación con los resultados de los parámetros de cada una de las filas del ANEXO # 7 es posible valorar el grado de adecuación de cada uno de los ocho indicadores evaluados.



**Figura 2.9:** Representación de la recta de puntos de corte.

Como se observa en el ANEXO # 7, la suma de las sumas menos el promedio (N-P) para los indicadores I1, I2, I3, I6, I7 e I8 a evaluar, resulta menor que el primer intervalo de los puntos de corte. Este resultado permite aseverar que los expertos consultados consideran muy adecuada:

- Contribución para detectar sólo la población sexualmente activa dividida en cuatro clases disjuntas  $xh(m)$ : hombres (mujeres) susceptibles (no portadores del virus) y  $yh(m)$  hombres (mujeres) infectadas (portadores de la enfermedad).
- Pertinencia de la ecuación que representa el comportamiento de las mujeres susceptibles( $xm$ ) en el tiempo.
- Pertinencia de la ecuación que representa la variación en el tiempo de los hombres infectados ( $yh$ ).
- Contribución para la experimentación de las aplicaciones de la cadena de Markov con los estados S: susceptible, I: infectado, N: muerte natural y E: muerte por la enfermedad.
- Posibilidad del modelo matemático para interpretar los datos, realizar predicciones de casos y evaluar diferentes acciones para tomar decisiones que permita contener

la epidemia.

- Influencia de la estrategia de control para reducir la probabilidad de transmisión.

También consideran adecuada:

- Posibilidades de modelar mediante el sistema de ecuaciones diferenciales la dinámica de transmisión del VIH/SIDA.
- Influencia del teorema de existencia y unicidad para modelos epidemiológicos.

### **Conclusiones parciales del Capítulo III**

- La fase de valoración de la investigación se desarrolla en dos etapas: la primera, dedicada a la determinación de un conjunto de posibles especialistas a considerar como expertos para la detección de movimiento y la segunda etapa, la constituyó la consulta a los expertos así seleccionados.
- El valor teórico y la factibilidad del modelo matemático, se corroboran a partir de la aplicación del Método de Expertos que reconocen el valor de una nueva propuesta.

## **Conclusiones**

Al finalizar la presente investigación se llega a las siguientes conclusiones:

- Se presenta el modelo matemático para la predicción del comportamiento de la epidemia del VIH/SIDA, definidos por ecuaciones diferenciales ordinarias. Demostrando la existencia y unicidad de la solución.
- Se valida el modelo mediante experimentación computacional.
- Se valida la estrategia de control con diferentes niveles de eficacia y basada en la ponderación de parámetros esenciales en la dinámica de VIH/SIDA.

## **Recomendaciones**

- El modelo presentado considera una población homogénea, de tal manera que la transmisión es igual para cada individuo, sin embargo, teniendo en cuenta que la probabilidad de contagio depende de varios factores como: edad, región geográfica, condiciones socioeconómicas o diferentes comportamientos de grupos de personas en especial, se recomienda complejizar el modelo propuesto con estos elementos.
- Trabajar la estimación de parámetros con técnicas de optimización y modelar la incertidumbre en el modelo.

## ANEXO # 1

### Encuesta para determinar el coeficiente de conocimiento de los expertos.

Objetivo: Determinar el nivel real de competencia en la temática objeto de estudio de los posibles expertos.

Usted fue seleccionado como posible experto, teniendo en cuenta su aval y experiencia en el campo objeto de estudio. Se le solicita que responda las siguientes interrogantes con el objetivo de poder llevar feliz término la investigación. Se le agradece de antemano su cooperación. Muchas gracias.

Temática que se investiga: Modelo para la transmisión del VIH/SIDA. Estrategia de control.

Nombre y apellidos:      Centro de trabajo:      Grado científico:

Categoría docente:

Años de experiencia docente:

1. Se le solicita que usted valore su nivel de competencia sobre la problemática que se investiga, marcando con una cruz el valor que considere en una escala de 1 al 10 (la máxima competencia se corresponde con el #10).

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

2- En la siguiente tabla, le proponemos que indique con una cruz en cada fila, el grado de influencia (alto, medio, o bajo) que tienen en sus criterios cada fuente de argumentación y marque con una X la que considere que más influido.

Fuentes de argumentación	Grado de influencia		
	Alto	Medio	Bajo
1. Análisis teórico realizado por usted.			
2. Su propia experiencia			
3. Trabajos de autores nacionales			
4. Trabajos de autores extranjeros			
5. Su propio conocimiento del problema.			

## ANEXO # 2

**Tabla :** Para determinar el coeficiente de argumentación Ka.

Fuentes de argumentación	Grado de influencia		
	Alto	Medio	Bajo
1. Análisis teóricos sobre el tema.	0.3	0.2	0.1
2. Experiencia.	0.5	0.4	0.2
3. Fuentes nacionales consultada	0.05	0.05	0.05
4. Fuentes extranjeras consultada	0.05	0.05	0.05
5. Conocimiento del problema.	0.05	0.05	0.05
6. Intuición	0.05	0.05	0.05
Totales	1.0	0.8	0.5

### ANEXO # 3

Tabla Determinación del coeficiente autovalorativo K

para la selección de los expertos.

Experto	Coeficiente de	Coeficiente de	Coeficiente auto	Nivel
1	0,8	0,9	0,85	alto
2	0,8	0,9	0,85	alto
3	0,8	1	0,90	alto
4	0,8	0,9	0,85	alto
5	0,8	1	0,90	alto
6	0,8	0,9	0,85	alto
7	0,8	0,9	0,85	alto
8	0,4	0,5	0,45	bajo
9	0,4	0,5	0,45	bajo
10	0,6	1	0,80	alto
11	0,6	1	0,80	alto
12	0,8	1	0,90	alto
13	0,2	0,7	0,45	bajo
14	1	1	1	alto
15	1	1	1	alto
16	1	1	1	alto
17	1	1	1	alto
18	0,2	0,7	0,45	bajo
19	1	1	1	alto
20	1	1	1	alto
21	1	1	1	alto
22	0,6	1	0,80	alto
23	1	1	1	alto
24	1	1	1	alto
25	0,6	0,8	0,70	medio
26	1	0,9	0,95	alto
27	1	0,9	0,95	alto
28	1	1	1	alto
29	0,2	0,8	0,50	medio
30	0,6	1	0,80	alto
31	0,2	0,8	0,50	medio
32	1	0,9	0,95	alto
33	0,2	0,4	0,30	bajo
34	0,2	0,4	0,30	bajo
35	0,6	1	0,80	alto
36	0,6	0,9	0,75	medio

## ANEXO # 4

Tabla Coeficiente de competencia de los expertos seleccionados.

Promedio de competencia: 0,83 alto

Experto	Coeficiente de	Coeficiente de	Coeficiente auto	Nivel
1	0,8	0,9	0,85	alto
2	0,8	0,9	0,85	alto
3	0,8	1	0,90	alto
4	0,8	0,9	0,85	alto
5	0,8	1	0,90	alto
6	0,8	0,9	0,85	alto
7	0,8	0,9	0,85	alto
8	0,6	1	0,80	alto
9	0,6	1	0,80	alto
10	0,8	1	0,90	alto
11	1	1	1	alto
12	1	1	1	alto
13	1	1	1	alto
14	1	1	1	alto
15	1	1	1	alto
16	1	1	1	alto
17	1	1	1	alto
18	0,6	1	0,80	alto
19	1	1	1	alto
20	1	1	1	alto
21	0,6	0,8	0,70	medio
22	1	0,9	0,95	alto
23	1	0,9	0,95	alto
24	1	1	1	alto
25	0,2	0,8	0,50	medio
26	0,6	1	0,80	alto
27	0,2	0,8	0,50	medio
28	1	0,9	0,95	alto
29	0,6	1	0,80	alto
30	0,6	0,9	0,75	medio

## ANEXO # 5

### Encuesta a expertos

Objetivo: Valorar por parte de los expertos la factibilidad de la propuesta del modelo matemático definidos por sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias para el estudio de la dinámica de transmisión del VIH/SIDA.

Estimado(a) colega, se está llevando a cabo una investigación con el objetivo de ofrecer una solución basada en un algoritmo de segmentación que se apoya en la descomposición wavelet discreta de un conjunto de datos.

Se necesita que aporte su criterio, luego de consultar dicha propuesta, referente a las cuestiones que seguidamente se le expone teniendo en cuenta la siguiente escala valorativa:

#### Categorías para la evaluación

Criterios	Categorías	Puntuación para la evaluación
Muy adecuada	C1	5
Adecuado	C2	4
Poco adecuado	C3	3
Inadecuado	C4	2
Sin opinión	C5	1

Para elaborar la propuesta de solución se tuvo en cuenta una estructura, la cual solicitamos que valore a partir de los indicadores que a continuación se le brinda:

Tabla: Valorar por parte de los expertos la propuesta de solución a partir de los indicadores siguientes:

Indicadores	Categorías				
	C1	C2	C3	C4	C5
Contribución para detectar sólo la población sexualmente activa dividida en cuatro clases disjuntas $xh(m)$ : hombres (mujeres) susceptibles (no portadores del virus) y $yh(m)$ hombres (mujeres) infectadas (portadores de la enfermedad) ( $I_1$ ).					
Pertinencia de la ecuación que representa el comportamiento de las mujeres susceptibles ( $xm$ ) en el tiempo ( $I_2$ ).					
Pertinencia de la ecuación que representa la variación en el tiempo de los hombres infectados ( $yh$ ) ( $I_3$ ).					
Posibilidades de modelar mediante el sistema de ecuaciones diferenciales la dinámica de transmisión del VIH/SIDA ( $I_4$ ).					
Influencia del teorema de existencia y unicidad para modelos epidemiológicos ( $I_5$ ).					
Contribución para la experimentación de las aplicaciones de la cadena de Markov con los estados S: susceptible, I: infectado, N: muerte natural y E: muerte por la enfermedad ( $I_6$ ).					
Posibilidad del modelo matemático para interpretar los datos, realizar predicciones de casos y evaluar diferentes acciones para tomar decisiones que permita contener la epidemia ( $I_7$ ).					
Influencia de la estrategia de control para reducir la probabilidad de transmisión ( $I_8$ ).					

## ANEXO # 6

Resumen de los resultados para cada categoría según la opinión de los expertos encuestados

Tabla : Matriz de frecuencias

Indicadores	C1	C2	C3	C4	C5	Total
I <sub>1</sub>	27	3	0	0	0	30
I <sub>2</sub>	24	6	0	0	0	30
I <sub>3</sub>	19	11	0	0	0	30
I <sub>4</sub>	19	10	1	0	0	30
I <sub>5</sub>	21	8	1	0	0	30
I <sub>6</sub>	23	7	0	0	0	30
I <sub>7</sub>	18	12	0	0	0	30
I <sub>8</sub>	23	7	0	0	0	30
Total	174	64	2	0	0	240

Tabla: Matriz de frecuencias acumuladas

Indicadores	C1	C2	C3	C4	C5
I <sub>1</sub>	27	30	30	30	30
I <sub>2</sub>	24	30	30	30	30
I <sub>3</sub>	19	30	30	30	30
I <sub>4</sub>	19	29	30	30	30
I <sub>5</sub>	21	29	30	30	30
I <sub>6</sub>	23	30	30	30	30
I <sub>7</sub>	18	30	30	30	30
I <sub>8</sub>	23	30	30	30	30
Total	174	238	240	240	240

## ANEXO # 7

Matriz de frecuencias relativas acumuladas y determinación de los puntos de corte.

Tabla : Matriz de frecuencias relativas acumuladas

Indicadores	C1	C2	C3	C4	C5
I1	0,9000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
I2	0,8000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
I3	0,6333	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
I4	0,6333	0,9667	1,0000	1,0000	1,0000
I5	0,7000	0,9667	1,0000	1,0000	1,0000
I6	0,7667	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
I7	0,6000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
I8	0,7667	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Tabla : Determinación de los puntos de corte

Indicadores	C1	C2	Suma	P	N-P
I1	1,28	3,49	4,77	2,39	-0,53
I2	0,84	3,49	4,33	2,17	-0,31
I3	0,34	3,49	3,83	1,92	-0,06
I4	0,34	1,83	2,17	1,09	0,77
I5	0,52	1,83	2,36	1,18	0,67
I6	0,73	3,49	4,22	2,11	-0,26
I7	0,25	3,49	3,74	1,87	-0,02
I8	0,73	3,49	4,22	2,11	-0,26
Suma	5,04	24,61	29,65	14,82	
Puntos de corte	0,63	3,08		N=1,85	

## Bibliografía

- Alcívar Zavala, J. A. (2000). *Análisis y valoración del Sistema Crediticio en el Ecuador, tanto para Bancos como Instituciones Financieras*. Guayaquil: ESPOL. Obtenido de <https://www.dspace.espol.edu.ec/bitstream/123456789/4159/1/6687.pdf>
- Aragonez González, M. P. (2015). *Análisis Termogravimétrico de la Pirólisis de Biosólidos de la Planta de Tratamiento de Agua Residual El Salitre*. Departamento de Ingeniería Química y Ambiental. Obtenido de <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/53716>
- Aravena, M., Caamaño, C., & Giménez, J. (2008). Modelos matemáticos a través de proyectos. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 11(1). Obtenido de [http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1665-24362008000100003&lng=es&nrm=iso&tlng=es](http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362008000100003&lng=es&nrm=iso&tlng=es)
- Bedoya-Urrego, K., Acevedo-Ruíz, J. M., Peláez-Jaramillo, C. A., & Agudelo-López, S. (2013). Caracterización de biosólidos generados en la planta de tratamiento de agua residual San Fernando, Itagüí (Antioquia, Colombia). *Revista de Salud Pública*, 15(5), 778-790. Obtenido de [https://www.scielosp.org/article/ssm/content/raw/?resource\\_ssm\\_path=/media/assets/rsap/v15n5/v15n5a13.pdf](https://www.scielosp.org/article/ssm/content/raw/?resource_ssm_path=/media/assets/rsap/v15n5/v15n5a13.pdf)
- Bejarano Novoa, M. E., & Escobar Carvajal, M. (2015). *Eficiencia del uso de microorganismos para el tratamiento de aguas residuales domésticas en una planta de tratamiento de agua residual*. Universidad de La Salle. Facultad de Ingeniería. Ingeniería Ambiental y Sanitaria. Obtenido de [https://ciencia.lasalle.edu.co/ing\\_ambiental\\_sanitaria/299/](https://ciencia.lasalle.edu.co/ing_ambiental_sanitaria/299/)
- Bocco, M. (2010). *Funciones elementales para construir modelos matemáticos*. Buenos aires: Instituto Nacional de Educación Tecnológica. Obtenido de <http://www.bnm.me.gov.ar/giga1/documentos/EL001843.pdf>
- Buitrón Méndez, G., Reino Sánchez, C., & Carrera Muyo, J. (2018). *Manual técnico sobre tecnologías biológicas aerobias aplicadas al tratamiento de aguas residuales industriales*. España: RED TRITÓN. Obtenido de [https://www.cyted.org/sites/default/files/tratamiento\\_aerobio\\_de\\_aguas\\_residuales.pdf](https://www.cyted.org/sites/default/files/tratamiento_aerobio_de_aguas_residuales.pdf)
- Carreño Sayago, U. F., & Méndez Sayago, J. A. (2011). Estimación de la confiabilidad de las plantas de tratamiento de aguas residuales que operan con lagunas de estabilización en la cuenca alta y media del Río Bogotá. *Ingeniería de Recursos Naturales y del Ambiente*, 10, 56-64. Obtenido de <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=231122666005>
- Chuchón Martínez, S. A., & Aybar Escobar, C. A. (2008). EVALUACIÓN DE LA CAPACIDAD DE REMOCIÓN DE BACTERIAS COLIFORMES FECALES Y DEMANDA BIOQUÍMICA DE OXÍGENO DE LA PLANTA DE TRATAMIENTO DE AGUAS RESIDUALES "LA TOTORA", AYACUCHO, PERÚ. *Ecología Aplicada*, 7(1), 165-171. Obtenido de <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=34111584020>
- Díaz-Cuenca, E., Alavarado-Granados, A. R., & Camacho-Calzada, K. E. (2012). El tratamiento de agua residual doméstica para el desarrollo local sostenible: el caso de la técnica del sistema unitario de tratamiento de aguas, nutrientes y energía

- (SUTRANE) en San Miguel Almaya. *Quivera*, 14(1), 78-97. Obtenido de <https://www.redalyc.org/pdf/401/40123894005.pdf>
- Ezzo, L. (2004). *Anaerobic treatment of domestic wastewater in subtropical regions*, PhD Thesis,. Wageningen University.
- Forero Gómez, G., & Martínez Lozano, J. A. (2020). *Modelo de regresión lineal múltiple para el pronóstico de ventas de bolsas ecológicas para la empresa Boleco S.A., en la ciudad de Bogotá D.C.* Bogotá: Universidad Cooperativa de Colombia. Obtenido de <http://hdl.handle.net/20.500.12494/16439>
- Gaibor Chávez, J. A. (2014). CARACTERIZACIÓN DEL AGUA RESIDUAL GENERADA EN LA PLANTA DE LÁCTEOS EL SALINERITO – PARROQUIA SALINAS – CANTÓN GUARANDA PARA EL DISEÑO DE UNA PLANTA DE TRATAMIENTO. *Revista de Investigación Talentos*, 1(1), 107-112. Obtenido de <https://talentos.ueb.edu.ec/index.php/talentos/article/view/92/121>
- Gandarillas, V., Saavedra, O., Escalera, R., & Montoya, R. (2017). evisión de las experiencias en el tratamiento de aguas residuales domésticas mediante reactores UASB en Cochabamba-Bolivia comparadas con las de Latinoamérica, India y Europa. *Investigación & Desarrollo*, 1(17), 83-98. doi:10.23881/idupbo.017.1-7i
- Garcés, D., & Jaimes Barragán, F. (2015). Ronda clínica y epidemiológica. Introducción al análisis multivariable (parte II). *Iatreia*, 28(1), 87-96. Obtenido de <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=180533008009>
- Hernández, D., & Sánchez, S. (2014). *Diseño de una planta de tratamiento de agua residual para el municipio de San Marcos-departamento de Sucre*. Bogotá: Universidad Católica de Colombia. Facultad de ingeniería. Programa de Ingeniería Civil. Obtenido de <https://core.ac.uk/download/pdf/71895046.pdf>
- Lahera Ramón, V. (2010). INFRAESTRUCTURA SUSTENTABLE: LAS PLANTAS DE TRATAMIENTO DE AGUAS RESIDUALES. *Quivera*, 12(2), 58-69. Obtenido de <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40115676004>
- Limones Lara, J. A. (2012). *Método para el control de la producción defectuosa dentro del proceso de conformado de metales. Caso ZF Sachs Automotive México*. Saltillo: CORPORACIÓN MEXICANA DE INVESTIGACIÓN EN MATERIALES. Obtenido de <https://comimsa.repositorioinstitucional.mx/jspui/bitstream/1022/96/1/Tesis%20Jonatan%20A%20Limones%20L.pdf>
- Mara, D., & Cairncross, S. (1990). *Directrices para el uso sin riesgos de aguas residuales y excretas en agricultura y acuicultura : medidas de protección de la salud pública*. Ginebra: Organización Mundial de la Salud –OMS–.
- Martínez-López, Y., García, M. M., Bello Pérez, R., Falcón Martínez, R., & Cabrera Bermúdez, X. (2014). Sistema experto para el tratamiento de aguas residuales(SECTRARES). *Revista Ingeniería Agrícola*, 4(3), 51-55. Obtenido de <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=586262041010>
- Mendonça, S. R., & Rojas Orozco, G. (2000). *Sistemas de lagunas de estabilización : cómo utilizar aguas residuales tratadas en sistemas de riego*. Santafé de Bogotá.
- Metcalf & Eddy. (2013). *Wastewater Engineering: Treatment and Resource Recovery*. McGraw Hill.

- Moeller, G., & Tomasini Ortiz, A. (2006). *Operación y mantenimiento de plantas de tratamiento de lodos activados*. Instituto Mexicano de Tecnología del Agua. Obtenido de <http://documentacion.ideam.gov.co/openbiblio/bvirtual/018834/MEMORIAS2004/CapituloII/5Microbiologiadelodosactivados.pdf>
- Montero Granados, R. (2016). Modelos de regresión lineal múltiple. *Universidad de Granada. España*.
- Montesinos-López, O. A., & Hernández-Suárez, C. M. (2007). Modelos matemáticos para enfermedades infecciosas. *Salud Pública de México*, 49(3), 218-226. Obtenido de <http://www.scielo.org.mx/pdf/spm/v49n3/07.pdf>
- MONTOYA VALER, S. K. (2017). *FACTORES SOCIOECONÓMICOS QUE AFECTAN AL CONSUMO DOMÉSTICO DE AGUA POTABLE USANDO LA REGRESIÓN MÚLTIPLE*. Puno: UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO. Obtenido de [https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&cad=rja&uact=8&ved=2ahUKEwio-JDjwKr1AhXtSjABHRhMAOgQFnoECBoQAQ&url=http%3A%2F%2Frepositorio.unap.edu.pe%2Fbitstream%2Fhandle%2FUNAP%2F4967%2FMontoya\\_Valer\\_Sharon\\_Kelly.pdf%3Fsequence%3D1&usg=A](https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&cad=rja&uact=8&ved=2ahUKEwio-JDjwKr1AhXtSjABHRhMAOgQFnoECBoQAQ&url=http%3A%2F%2Frepositorio.unap.edu.pe%2Fbitstream%2Fhandle%2FUNAP%2F4967%2FMontoya_Valer_Sharon_Kelly.pdf%3Fsequence%3D1&usg=A)
- Nolasco, D. A. (2010). *Desarrollo de proyectos MDL en plantas de tratamiento de aguas residuales*. Banco Interamericano de Desarrollo. Obtenido de <https://publications.iadb.org/publications/spanish/document/Desarrollo-de-proyectos-MDL-en-plantas-de-tratamiento-de-aguas-residuales.pdf>
- Plaza Gálvez, L. F. (2016). Modelación matemática en ingeniería. *IE Revista de investigación educativa de la REDIECH*, 7(13), 47-57. Obtenido de <https://www.redalyc.org/journal/5216/521655237005/>
- Ramos Alvaríño, C., & Pellón Arrechea, A. (2006). Metodología empleada en el diseño de tecnologías de tratamiento de las aguas residuales de la producción de diversos medicamentos. *Revista CENIC. Ciencias Biológicas*, 37(2), 93-100. Obtenido de <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=181220540005>
- Ramos, A., Sánchez, P., Ferrer, J. M., Barquín, J., & Linares, P. (2010). *Modelos matemáticos de optimización*. Madrid: Universidad Pontificia Comillas. Obtenido de [https://d1wqtxts1xzle7.cloudfront.net/34357606/modelado\\_en\\_gams-with-cover-page-v2.pdf?Expires=1633687201&Signature=EzhFiG-skxPtDHclAwclQ08Qgji~w3TqbHmhGJKqARfyW1SAIdIZH5DDJXiHRLC8v2Tdb-zncNZYV4WfKu0LVXNlkmLiT6Noochcf21rjOhupk0blXvhHdDbsWtw~Me7oBaSZ0g4ocy](https://d1wqtxts1xzle7.cloudfront.net/34357606/modelado_en_gams-with-cover-page-v2.pdf?Expires=1633687201&Signature=EzhFiG-skxPtDHclAwclQ08Qgji~w3TqbHmhGJKqARfyW1SAIdIZH5DDJXiHRLC8v2Tdb-zncNZYV4WfKu0LVXNlkmLiT6Noochcf21rjOhupk0blXvhHdDbsWtw~Me7oBaSZ0g4ocy)
- Ríos-Hidalgo, L. M., Águila-Hernández, I., & Montesino-Herrera, M. (2014). Tecnología para el tratamiento de las aguas residuales ácidas de la planta de síntesis de un compuesto nitroaromático. *Tecnología Química*, 34(1), 48-53. Obtenido de <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=445543781005>
- Rodríguez Velázquez, J. A., & Steegmann Pascual, C. (2013). *Modelo Matemáticos*. Obtenido de [https://recursos.salonesvirtuales.com/wp-content/uploads/bloques/2012/08/Modelos\\_matematicos.pdf](https://recursos.salonesvirtuales.com/wp-content/uploads/bloques/2012/08/Modelos_matematicos.pdf)
- Rodríguez, J. A. (2014). *Tratamiento anaerobio de aguas residuales*. Cali: Universidad el Valle. Obtenido de <http://www.ingenieroambiental.com/4014/tratamiento545.pdf>

- Rodríguez-Gallegos, R., & Bourguet-Díaz, R. E. (2015). Identifying Modeling Practices Through Differential Equations and Simulation. *122nd SEE Annual Conference-Exposition*. Obtenido de <https://www.asee.org/public/conferences/56/papers/13153/view>
- ROJAS VICTORIO, C. E. (2020). *Principales factores de riesgos psicológicos que influyen en los accidentes de trabajo en la minera aurífera Retamas S.A. Cerro de Pasco: UNIVERSIDAD DANIEL ALCIDES CARRION*. Obtenido de [https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&cad=rja&uact=8&ved=2ahUKEwjrs6jV06r1AhWIRTABHXFEUw4ChAWegQIAhAB&url=http%3A%2F%2F repositorio.undac.edu.pe%2Fbitstream%2Fundac%2F1876%2F1%2FT026\\_04067250\\_M.pdf&usq=AOvVaw0FNN0rOV5PtyuLP1ytZKW-](https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&cad=rja&uact=8&ved=2ahUKEwjrs6jV06r1AhWIRTABHXFEUw4ChAWegQIAhAB&url=http%3A%2F%2F repositorio.undac.edu.pe%2Fbitstream%2Fundac%2F1876%2F1%2FT026_04067250_M.pdf&usq=AOvVaw0FNN0rOV5PtyuLP1ytZKW-)
- Rojas, R. (2002). Sistemas de tratamiento de aguas residuales. *Gestión integral de tratamiento de aguas residuales*, 1(1), 8-15. Obtenido de [https://d1wqtxts1xzle7.cloudfront.net/57123734/GESTION\\_INTEGRAL\\_DEL\\_TRATAMIENTO\\_AR-with-cover-page-v2.pdf?Expires=1637630635&Signature=X2HJDHs74cDVrmX94QcWaGttHtoQ2-NJ6j4ftBNlx2i-ybCAMyXZg2oiE2WmYH0r77zGIJXZL~r37Ld2WI16c~GZW1B0M8W8qO9CwqjN~eiq2pCUska-DzC](https://d1wqtxts1xzle7.cloudfront.net/57123734/GESTION_INTEGRAL_DEL_TRATAMIENTO_AR-with-cover-page-v2.pdf?Expires=1637630635&Signature=X2HJDHs74cDVrmX94QcWaGttHtoQ2-NJ6j4ftBNlx2i-ybCAMyXZg2oiE2WmYH0r77zGIJXZL~r37Ld2WI16c~GZW1B0M8W8qO9CwqjN~eiq2pCUska-DzC)
- Rojo Abuín, J. M. (2007). Regresión lineal múltiple. *Instituto de Economía y Geografía*, 2-33. Obtenido de [https://d1wqtxts1xzle7.cloudfront.net/36787341/REGRESION\\_LINEAL\\_MULTIPLE\\_3-with-cover-page-v2.PDF?Expires=1640663317&Signature=MH9ICvACS9azM8zOaqrXKMjBZKnQ49AngSm4U1Hz2XG-EePggOo413~c6mu4HBGfaWrBXsHftzJ9KYmY070cTcz6ReXEL2alQyNbk~waucilFjWwWzIYf7fwji2iiDJo](https://d1wqtxts1xzle7.cloudfront.net/36787341/REGRESION_LINEAL_MULTIPLE_3-with-cover-page-v2.PDF?Expires=1640663317&Signature=MH9ICvACS9azM8zOaqrXKMjBZKnQ49AngSm4U1Hz2XG-EePggOo413~c6mu4HBGfaWrBXsHftzJ9KYmY070cTcz6ReXEL2alQyNbk~waucilFjWwWzIYf7fwji2iiDJo)
- Sánchez Ramírez, J. E., Mejía Fajardo, A., & Amorocho Cruz, C. M. (2015). Software de ingeniería especializado en el diseño y simulación de plantas de tratamiento de agua residual: revisión. *Revista Ingeniería y Región*, 13(1), 57-71. Obtenido de <https://journalusco.edu.co/index.php/iregion/article/view/709/1356>
- Tchobanoglous, G., & Burton, F. L. (1991). *Wastewater Engineering: Treatment Disposal Reuse* (3rd Edition ed.). McGraw-Hill.
- Torres, P. (2012). Perspectivas del tratamiento anaerobio de aguas residuales domésticas en países en desarrollo. *EIA*(18), 115-129. Obtenido de <http://www.scielo.org.co/pdf/eia/n18/n18a10.pdf>
- Van Haandel, A. C., & Lettinga, G. (1994). *Anaerobic sewage treatment: a practical guide for regions with a hot climate*. John Wiley & Sons.
- Vivanco, E., Yaya, R., & Chamy, R. (2018). *Manual técnico sobre tecnologías biológicas anaerobias aplicadas al tratamiento de aguas y residuos industriales*. España: RED TRITÓN. Obtenido de [https://www.cytcd.org/sites/default/files/tratamiento\\_anaerobio\\_de\\_aguas\\_residuales.pdf](https://www.cytcd.org/sites/default/files/tratamiento_anaerobio_de_aguas_residuales.pdf)