



**REPÚBLICA DEL ECUADOR
UNIVERSIDAD ESTATAL DE MILAGRO
VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO**

**TÍTULO DEL PROYECTO:
“OPTIMIZACIÓN DE LA DINÁMICA DE UN SISTEMA DE CONTROL DEL
INTERCAMBIO DE ENERGÍA CALÓRICA ENTRE FLUIDOS VISCOSOS”**

INFORME DE INVESTIGACIÓN PREVIO AL TÍTULO DE:

**MAGÍSTER EN MATEMÁTICA
CON MENCIÓN EN MODELACIÓN MATEMÁTICA**

**Autor:
ING. MILTON FABIÁN PEÑAHERRERA LARENAS**

**DIRECTOR:
DR. ARÍSTIDES REYES BACARDÍ**

MILAGRO, JUNIO 2022

ACEPTACIÓN DEL TUTOR

En calidad de Tutor de Proyecto de Investigación, nombrado por el Comité Académico del Programa de Maestría en Matemáticas mención Modelación Matemática de la Universidad Estatal de Milagro.

CERTIFICO

Que he analizado el Proyecto de Investigación con el tema “**OPTIMIZACIÓN DE LA DINÁMICA DE UN SISTEMA DE CONTROL DEL INTERCAMBIO DE ENERGÍA CALÓRICA ENTRE FLUIDOS VISCOSOS.**”, elaborado por el **ING. MILTON FABIAN PEÑAHERRERA LARENAS** el mismo que reúne las condiciones y requisitos previos para ser defendido ante el tribunal examinador, para optar por el título de **MAGÍSTER EN MATEMÁTICAS MENCIÓN MODELACIÓN MATEMÁTICA.**

Milagro, 28 de abril del 2022



ARISTIDES REYES BACARDI

C.I. 0956636336

Declaración de autoría de la investigación

El / la autor/a de esta investigación declara ante el Comité Académico del Programa de Maestría en MATEMÁTICAS MENCIÓN MODELACIÓN MATEMÁTICA de la Universidad Estatal de Milagro, que el trabajo presentado de mi propia autoría, no contiene material escrito por otra persona, salvo el que está referenciado debidamente en el texto; parte del presente documento o en su totalidad no ha sido aceptado para el otorgamiento de cualquier otro Título de una institución nacional o extranjera

Milagro, 24 de junio del 2022



Firmado electrónicamente por:
**MILTON FABIAN
PENAHERRERA
LARENAS**

ING. MILTON FABIAN PEÑAHERRERA LARENAS

C.I 0916301815

APROBACIÓN DEL TRIBUNAL



VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO CERTIFICACIÓN DE LA DEFENSA

El TRIBUNAL CALIFICADOR previo a la obtención del título de **MAGÍSTER EN MATEMÁTICA MENCIÓN MODELACIÓN MATEMÁTICA**, otorga al presente proyecto de investigación en las siguientes calificaciones:

TRABAJO DE TITULACION	60.00
DEFENSA ORAL	40.00
PROMEDIO	100.00
EQUIVALENTE	Excelente



Firmado electrónicamente por:
**JUAN DIEGO
VALENZUELA
COBOS**

Phd. VALENZUELA COBOS JUAN DIEGO
PRESIDENTE/A DEL TRIBUNAL



Firmado electrónicamente por:
**ARISTIDES
REYES**

Mgtr. REYES BACARDI ARISTIDES
DIRECTOR/A DE TFM



Firmado electrónicamente por:
**KEYLA STEFANIA
GUERRERO RUIZ**

Megcp GUERRERO RUIZ KEYLA STEFANIA
SECRETARIO/A DEL TRIBUNAL

Dedicatoria

El presente proyecto de investigación está dedicado a:

Dios por ser aquel que con su amor y bondad ha permitido culminar este logro académico.

A mi familia que ha contribuido con la comprensión necesaria para superar algunas adversidades

A mis padres, que siempre creen en mí y que siempre me brindan su apoyo.

A mis amigos de maestría que supieron soportarme durante casi 3 años.

En fin, hay muchas personas que de una u otra forma han contribuido con este éxito académico.

Agradecimientos

A la Universidad Estatal de Milagro por cumplir las exigencias en esta maestría

A mis profesores menos a Larreal

A mi tutor que estuvo para apoyarme en la realización de este trabajo de principio a fin

A mis compañeros de curso

A mis amigos de grupo

En fin, a todos

Muchas gracias

Cesión de derechos de autor

Sr. Dr.

Jorge Fabricio Guevara Viejó

Rector de la Universidad Estatal de Milagro

Presente.

Mediante el presente documento, libre y voluntariamente procedo a hacer entrega de la Cesión de Derecho del Autor del Trabajo realizado como requisito previo para la obtención de mi Título de Cuarto Nivel, cuyo tema fue “**Optimización de la dinámica de un sistema de control del intercambio de energía calórica entre fluidos viscosos.**”, y que corresponde a la Dirección de Investigación y Posgrado.

Milagro, 24 de Junio del 2022



Firmado electrónicamente por:
**MILTON FABIAN
PENAHERRERA
LARENAS**

Ing. Milton Peñaherrera Larenas
C.I 0916301815

ÍNDICE

ACEPTACIÓN DEL TUTOR	ii
Declaración de autoría de la investigación	iii
APROBACIÓN DEL TRIBUNAL	iv
Dedicatoria	v
Agradecimientos	vi
Cesión de derechos de autor	vii
ÍNDICE	viii
Índice de figuras	x
Resumen	xi
Abstract	xii
CAPÍTULO I	1
1. Introducción	1
1.1. Situación problemática	2
CAPÍTULO II	4
2. Objetivos	4
2.1. Objetivo general.	4
2.2. Objetivos específicos.	4
CAPÍTULO III	5
3. Planteamiento hipotético	5
CAPÍTULO IV	6
4. Marco teórico	6
4.1. Antecedentes de la investigación (estado del arte).	6
4.2. Bases teóricas.	8
4.2.1.1. Estado del arte del control óptimo	9
4.2.1.2. Descripción del control en el espacio de estado	9
4.2.1.3 El cálculo de variaciones	13
4.2.1.4 Teoría del controlador óptimo	19
4.2.1.5 Modelo matemático del intercambiador de calor	22
4.2.1.6 Comportamiento del modelo matemático	23
4.2.1.7 Análisis del comportamiento del modelo	26

CAPÍTULO V	27
5. Materiales y métodos	27
5.1. Diseño del Regulador Lineal Cuadrático (LQR) para el modelo de la planta del intercambiador de calor del Laboratorio de Termofluidos de FACI	27
5.2 Diseño del controlador óptimo para la planta del intercambiado de calor del Laboratorio de Termofluidos de FACI	36
5.2. Tipo de investigación	41
5.3. Población	42
5.4. Muestra	42
5.5. Fuentes de información primarias y secundarias	43
6. Resultados y discusión	43
7. Conclusiones y recomendaciones	48
<i>Conclusiones.</i>	48
<i>Recomendaciones.</i>	49
8. Referencias bibliográficas.	50

Índice de figuras

Figura 2.1 Diferentes trayectorias para moverse de manera óptima desde A hasta Z.....	14
Figura 2.2 El instante final T está fijado, pero hay libertad para elegir el estado final.	15
Figura 2.3 Se muestra cómo se fija el valor final y el instante final queda libre para elección.....	16
Figura 2.4 Se muestra cómo el valor final y el instante final quedan relacionados por una función dada.	16
Figura 2.5 Función cóncava (extremo máximo)	18
Figura 2.6. Respuesta de la salida y_1t al aplicar un salto en cada entrada de control	24
Figura 2.7. Respuesta de la salida y_2t al aplicar un salto en cada entrada de control.	25
Figura 3.1 Diagrama en bloques del regulador a diseñar	28
Figura 3.2. Diagrama en bloques de Simulink usado para las simulaciones del controlador LQR	32
Figura 3.3. Resultados de la corrida del control óptimo LQR con $Q_a=eye(4)$; $R_a=eye(2)$	33
Figura 3.4. Resultados de la corrida del control óptimo LQR con $Q_a=eye(4)$; $R_a=0.1*eye(2)$	34
Figura 3.5. Resultados de la corrida del control óptimo LQR con $Q_a=1.1*eye(4)$; $R_a=0.01*eye(2)$	36
Figura 3.6 Programación del bloque State-space.....	38
Figura 3.7 Medición del tiempo de subida de la respuesta Y_1	44
Figura 3.8 Medición del valor pico de la respuesta y su instante de tiempo de ocurrencia.....	44
Figura 3.9 Medición del tiempo de establecimiento de la respuesta.....	45
Figura 3.10 Medición del tiempo de subida de la respuesta Y_2	46
Figura 3.11 Medición del valor pico para Y_2 y su instante de ocurrencia.....	46
Figura 3.12 Medición del tiempo de establecimiento del proceso de cambio para	47

Resumen

Este trabajo de investigación versa sobre la posibilidad de diseñar un controlador óptimo para la planta de termofluidos de la FACI de UNEMI.

En particular se controlan dos variables de salida de un intercambiador de calor de placas. Por comodidad matemática el trabajo se desarrolla en términos del par de vectores $[\vec{x}(t), \vec{y}(t)]$ lo que hace más complejo el análisis por ser un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de múltiples entradas y múltiples salidas.

Durante el desarrollo se establecen los espacios vectoriales donde serán válidas las respuestas encontradas para las ganancias de las matrices del regulador óptimo k_a, k y k_i

Se analiza inicialmente el cálculo de variaciones para después continuar con el diseño del regulador óptimo mediante un criterio cuadrático de optimización adecuado ya que el sistema de ecuaciones diferenciales es de tiempo continuo, con coeficientes invariables con el tiempo y lineal en los estados y en control.

Los resultados fueron comprobados por simulación, ajustando los valores de las matrices involucradas en la función de coste las cuales son los parámetros de ajuste de todo control óptimo. Se proporcionan los resultados de manera gráfica y las mediciones realizadas para validar la aceptación del controlador diseñado.

Se dan 4 conclusiones sobre los resultados obtenidos con diferentes valores de las matrices Q_a y R_a . Se indica la dirección futura a seguir con la hipótesis de que el empleo de los algoritmos genéticos (AG) proporcionará una manera rápida de ajustar las entradas de tales matrices, así como que con los AG el ajuste puede concebirse adaptativo en el tiempo de funcionamiento de la planta.

Palabras claves: fluidos viscosos, algoritmos genéticos, simulación

Abstract

This research work deals with the possibility of designing an optimal controller for the thermofluid plant of the FACI of UNEMI.

In particular, two output variables of a plate heat exchanger are controlled. For mathematical convenience, the work is developed in terms of the pair of vectors $[x^{\vec{}}(t), y(t)]$, which makes the analysis more complex as it is a system of ordinary differential equations with multiple inputs and multiple outputs.

During the development, the vector spaces are established where the answers found for the gains of the matrices of the optimal regulator k_a , $[k$ and $k]_i$ will be valid.

The calculus of variations is initially analyzed to then continue with the design of the optimal regulator by means of a suitable quadratic optimization criterion since the system of differential equations is continuous time, with invariant coefficients with time and linear in the states and in control.

The results were verified by simulation, adjusting the values of the matrices involved in the cost function, which are the adjustment parameters of all optimal control. The results are provided graphically and the measurements made to validate the acceptance of the designed controller.

Four conclusions are given on the results obtained with different values of the Q_a and R_a matrices. The future direction to follow is indicated with the hypothesis that the use of genetic algorithms (GA) will provide a fast way to adjust the entries of such matrices, as well as that with GA the adjustment can be conceived adaptive in the operating time of plant.

Keywords: viscous fluids, genetic algorithms, simulation

CAPÍTULO I

1. Introducción

En el trabajo presentado al evento IEEE ETCM 2021 (Bucheli Carpio & Reyes Bacardí, Viscous Fluid Heating Process Identification in a Plate Heat Exchanger, 2021) describe los pasos iniciales realizados para obtener el modelo matemático del intercambiador de calor del Laboratorio de Termofluidos los que se fundamentan en la identificación del modelo matemático por los métodos clásicos de la Teoría de Control.

La bibliografía (Bucheli Carpio & Reyes Bacardí, Diseño de un control inteligente en base a Redes Neuronales para el control de temperatura y presión en un intercambiador de calor del Laboratorio Didactico de Fluidos Viscosos. Informe de Tesis, 2016) describe un proceso de termofluidos viscosos y diseña un regulador neuronal para la adaptación del control a cambios paulatinos acotados en $\pm 3\sigma_{fit}$ donde σ_{fit} – es la desviación estándar promedio de ajuste de los parámetros identificados mediante experimentación.

En (Junjie, 2018) se proporciona una revisión de la optimización del intercambiador de calor, de los algoritmos óptimos y se discute la optimización con diferentes funciones objetivos presentada hasta 2018.

En (Goldberg, 1989), (Yunfeng, Ping, & Ling, 2013) y (Dongshu, Dapei, & Lei, 2017) se presentan los Algoritmos Genéticos empleados en la optimización, los algoritmos eficientes de optimización por el Método de colonias de abejas y la revisión del algoritmo de optimización que emplea el enjambre de partículas respectivamente, que pueden ser empleados también para la optimización de los reguladores.

En (Kirk, 1970) y (Ogata, 2010) se presentan las teorías clásicas para el control optimal desde los puntos de vista de los matemáticos y de los ingenieros respectivamente.

La teoría del control óptimo es una rama de la optimización matemática que se ocupa de encontrar un “control” para un sistema que cambia sus variables con el tiempo durante cierto intervalo de tiempo de manera que se optimice una función objetivo (Ross I. , 2015)

Tiene gran aplicación en la ciencia, la ingeniería y en la investigación de operaciones. Por ejemplo, el sistema dinámico podría ser la economía de una nación, con el objetivo de minimizar el desempleo; los controles en este caso podrían ser la política fiscal y la política monetaria (Ross, Proulx, & Karpenko, 2020).

También se puede introducir un sistema dinámico para integrar problemas de investigación de operaciones en el marco de la teoría del control óptimo, (Ross I. , 2015).

El control óptimo es una extensión del cálculo de variaciones y es un método de optimización matemática para obtener políticas de control (Sargent, 2000).

El método se debe en gran parte al trabajo de Lev Pontryagin y Richard Bellman en la década de 1950, después de las contribuciones al cálculo de variaciones de Edward J. McShane (Bryson, 1996). El control óptimo puede verse como una estrategia de control en la teoría del control (Ross I. , 2015).

1.1. Situación problemática

En este trabajo se procede al estudio de los sistemas de ecuaciones diferenciales con interacciones entre las variables de estado, o sea al estudio del comportamiento de un sistema de ecuaciones controlado y la interacción entre variables.

Para darle solución al problema se define el espacio de funciones y su métrica, y se busca la función de control que minimiza un funcional dado: la medición del desempeño.

Se incluye la verificación de la existencia de la solución óptima que resuelva el problema en el sentido de mínimo error final y tiempo mínimo de duración del proceso de tránsito para la eliminación de perturbaciones determinísticas.

En (Bucheli Carpio & Reyes Bacardí, Diseño de un control inteligente en base a Redes Neuronales para el control de temperatura y presión en un intercambiador de calor del Laboratorio Didáctico de Fluidos Viscosos. Informe de Tesis, 2016) se resuelve el problema de controlar un proceso de múltiples entradas y múltiples salidas mediante la aplicación de un control clásico Proporcional, Integral y Derivativo (PID) que puede adaptar sus parámetros a las variaciones del modelo.

Este control encara adecuadamente los problemas de incertidumbre en los valores de los parámetros del modelo, sin embargo, el mismo no se diseña a partir del requerimiento de encontrar los valores óptimos de los parámetros del controlador.

CAPÍTULO II

2. Objetivos

2.1. Objetivo general.

Obtener el control óptimo de modelos matemáticos complejos mediante el método de control óptimo de funcionales para su implementación en un proceso de trasvase de termofluidos.

2.2. Objetivos específicos.

1. Identificar las características algebraicas de los modelos n -dimensionales controlables, observables y estabilizables mediante la formulación de matrices para definir la dinámica de los procesos modelados.
2. Determinar el grado de interrelación entre las variables a observar en el modelo matemático empleando la revisión de las entradas de la matriz de los estados y de control,
3. Calcular y emplear los valores singulares de la matriz e obtenida con la función lqr para el diseño del control óptimo.
4. Comparar los resultados obtenidos con los métodos de control óptimo del cálculo variacional en modelos n -dimensionales complejos.
5. Aplicar el mejor resultado de optimización en un ejemplo de modelo matemático de trasvase de fluidos viscosos calientes para implementar en la planta de termofluidos.

CAPÍTULO III

3. Planteamiento hipotético

Como hipótesis nula se ha formulado la hipótesis de que un control del tipo Linear Quadratic Regulation (LQR) puede ser diseñado para su posterior implementación en el control óptimo del intercambiador de calor de placas de la planta de termofluidos.

La hipótesis alternativa se fundamenta en que los controladores ya diseñados (Almeida Salazar, Mora Valverde, & Reyes Bacardí, 2018) y (Merino Pilay, Olmedo, & Reyes Bacardí, 2019), pueden ser optimizados.

La variable dependiente se declara como los índices de desempeño del control óptimo del sistema de intercambio de energía calórica de fluidos viscosos. La variable independiente se declara como el control óptimo del sistema.

CAPÍTULO IV

4. Marco teórico

4.1. Antecedentes de la investigación (estado del arte).

El problema de la transferencia de energía calórica de un medio de trabajo a otro medio de trabajo, se ha utilizado ampliamente en diferentes industrias como por ejemplo la petroquímica, los sistemas de climatización y muchos otros campos. El diseño óptimo y la operación eficiente del intercambio de calor son de gran importancia para lograr la conservación de energía, la reducción de costos de producción y la reducción del consumo de energía.

En este sentido en (Bucheli Carpio & Reyes Bacardí, Diseño de un control inteligente en base a Redes Neuronales para el control de temperatura y presión en un intercambiador de calor del Laboratorio Didactico de Fluidos Viscosos. Informe de Tesis, 2016) se realizó la identificación de un modelo matemático del proceso de temperatura y presión en un intercambiador de calor de placas empleando el formalismo entrada salida (funciones de transferencia) y se le diseñó un control por las técnicas de las Redes Neuronales Artificiales. Este control neuronal no se fundamenta en los métodos de optimización existentes, sino en la adaptación online de los parámetros del regulador ante cambios en los parámetros de la planta real.

Para aplicar los resultados matemáticos y las técnicas numéricas de la teoría de la optimización a problemas concretos, es necesario delinear con claridad los límites del sistema a optimizar, así como definir el funcional o criterio cuantitativo en función de la variable de control y la medida del desempeño para determinar el 'mejor' regulador. Esto requerirá seleccionar las variables del sistema que se utilizarán para caracterizar o identificar las funciones de controles candidatas. A su vez, debe quedar definido un modelo matemático que exprese la forma en que las variables están relacionadas.

La optimización multiobjetivo (Kirk, 1970) queda definida entonces por el conjunto de relaciones (1.1), (1.2) y (1.3)

$$J(x_i, u_k) \tag{1.1}$$

$$g_l(\vec{x}) \geq 0 \tag{1.2}$$

$$h_q(\vec{x}) = 0 \tag{1.3}$$

Donde

$J(x_i, u_k)$ – función objetivo

x_i – variables de estado, $i = 1, 2, \dots, n$

u_k – funciones de control $k = 1, 2, \dots, m$

Además, (1.2) y (1.3) representan respectivamente las restricciones a manera de desigualdades y las restricciones a manera de igualdades, mismas que deben ser definidas en cada problema concreto, pero pueden ser analizadas de manera general si se define la región del espacio vectorial de funciones candidatas.

En la línea de optimización actual se destacan las técnicas de optimización empleando los algoritmos genéticos (Goldberg, 1989), el algoritmo de colonia de abejas artificiales (Yunfeng, Ping, & Ling, 2013), el algoritmo de enjambre de partículas (Dongshu, Dapei, & Lei, 2017) y otras.

En los problemas de la teoría del control optimal se destacan, la programación dinámica, el principio del máximo de Pontryaguin y las técnicas numéricas para la optimización de la trayectoria (Kirk, 1970)

Una rama de las matemáticas que resulta sumamente útil para resolver problemas de optimización es el cálculo de variacional (Kamien, 2013).

En los problemas de control óptimo, el objetivo es (Luenberger, 1979) determinar una función de control que minimice un funcional específico: la medición del desempeño.

Los desarrollos actuales que han recibido mayor atención por parte de la comunidad de control optimal se enfocan en la obtención de un regulador lineal cuadrático (LQR en inglés) para sistemas de una entrada una sola salida (SISO). Las técnicas de diseño de controladores LQR dadas en (Kamien, 2013) buscan obtener una estructura de un regulador optimal para un sistema SISO lineal y continuo descrito en el espacio de estados con respecto a un funcional del tipo integral-cuadrático, problema con una gran importancia pues un gran número de sistemas tecnológicos pueden ser tratados con esta formulación matemática.

En este trabajo se discute la optimización del control para modelos matemáticos que presentan interacciones entre las variables a controlar, o sea para modelos de múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO en inglés). Los resultados del diseño se aplican a un caso específico de intercambiador de calor de placas. Luego, optimización del control del intercambiador de calor considerando diferentes condiciones se comparan y analizan. Finalmente, se resumen todos los problemas discutidos y se realizan las propuestas convenientes para continuar la investigación.

4.2. Bases teóricas.

En la planta de termofluidos de los laboratorios de la facultad de Ciencias e Ingeniería se han realizado diferentes propuestas mediante varias tesis de maestría de la Maestría de Automatización y Control (MACI) de la Facultad de Ingeniería Eléctrica y Computación (FIEC) de la Escuela Superior Politécnica del Litoral (ESPOL), cuyos autores y tutor fueron: (Bucheli Carpio & Reyes Bacardí, Diseño de un control inteligente en base a Redes Neuronales para el control de temperatura y presión en un intercambiador de calor del Laboratorio Didactico de Fluidos Viscosos. Informe de Tesis, 2016), (Sánchez Aquino, Flores Tomalá, & Reyes Bacardí, 2016), (Almeida Salazar, Mora Valverde, & Reyes Bacardí, 2018) y (Merino Pilay, Olmedo, & Reyes Bacardí, 2019).

Para el control del intercambiador de calor se diseñaron controladores del tipo PID y red neuronal para la adaptación de los parámetros del controlador PID, el

sistema de detección automática de fallos de la válvula de control de la planta de termofluidos, un controlador difuso y un controlador predictivo, respectivamente. En todas estas tesis se emplearon la formulación entrada salida con funciones de transferencia.

En lo que sigue se plantea la tarea de diseñar un controlador óptimo, el cual debe proporcionar los parámetros de dicho controlador en el espacio de estados de manera que se logre un comportamiento óptimo del intercambiador de calor con fluidos viscosos.

4.2.1.1. Estado del arte del control óptimo

4.2.1.2. Descripción del control en el espacio de estado

En la teoría del control matemático existen dos enfoques, el primero es el enfoque dado al control de un sistema de una entrada y una salida y el segundo es el enfoque dado a los sistemas controlados de múltiples entradas y múltiples salidas.

Se comienza este desarrollo por el enfoque de una entrada una salida para comprender que es el control de sistemas. Entenderemos por sistema un modelo matemático dado por una ecuación diferencial cuyas variables están definidas en los espacios vectoriales siguientes:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -ax(t) + bu(t) \quad (2.1)$$

Donde

$x(t)$ – es la variable de interés a controlar

$x(t) \in R$ – el espacio vectorial real de la variable a controlar

$x(t) \in C^n$ – es una función n diferenciable

Que cumple la propiedad de $\forall n \geq 1$

$$D_n x(t_f) = 0$$

Con t_f – valor final del tiempo de regulación

Siendo $D_n x(t) \equiv \frac{d^n x(t)}{dt^n}$ – por definición

$u(t) \in R$ – el espacio vectorial real de los controles

$(a, b) \in K$ – cuerpo de escalares

La ecuación diferencial ordinaria de primer orden (2.1) requiere, para su solución, que esté definido el valor inicial para $x(t)$, o sea

$$\forall t = t_o \quad (2.2)$$

$$x(t_o) = x_o \in R \quad (2.3)$$

De igual manera, para el tiempo final de control se requiere conocer el punto donde se desea terminar la regulación o control del sistema, o sea para

$$\forall t = t_f \quad (2.4)$$

$$\frac{d^n x(t_f)}{dt^n} = 0 \quad (2.5)$$

La expresión (2.5) implica que la variable $x(t)$, al alcanzar el punto $x(t_f)$ no se moverá del punto final alcanzado por la acción de control u .

Si es válido (2.5), entonces

$$0 = -ax(t_f) + bu(t_f) \quad (2.6)$$

Resolviendo (2.6) para el control, tendremos

$$x(U) = \frac{a}{b} U \quad (2.7)$$

Esta expresión refleja el hecho que la variable ha quedado parametrizada en el valor del control U .

¿Cuál es el inconveniente principal en esta formulación del control?

Obsérvese que independientemente de donde se encuentra el punto inicial de la trayectoria x_0 , siempre se aplicará el mismo valor de control. No importa a qué distancia esté el punto inicial del punto deseado final, la magnitud del control no cambiará.

De igual manera se puede plantear el problema para un sistema de dos entradas dos estados, por ejemplo:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = -a_{11}x_1(t) - a_{12}x_2(t) + b_{11}u_1(t) \quad (2.8)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -a_{21}x_1(t) - a_{22}x_2(t) + b_{21}u_2(t) \quad (2.9)$$

$$\frac{d^n x(t_f)}{dt^n} = 0 \quad \forall n = 1, 2 \quad (2.10)$$

$$0 = -a_{11}x_1(t) - a_{12}x_2(t) + b_{11}U_1$$

$$0 = -a_{21}x_1(t) - a_{22}x_2(t) + b_{21}U_2$$

Entonces los estados estarán parametrizados en los controles como sigue:

$$x_1(U_1, U_2) = -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2(U_1, U_2) + \frac{b_{11}}{a_{11}}U_1 \quad (2.11)$$

$$x_2(U_1, U_2) = -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1(U_1, U_2) + \frac{b_{21}}{a_{22}}U_2 \quad (2.12)$$

Sustituyendo (2.12) en (2.11)

$$x_1(U_1, U_2) = \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}x_1(U_1, U_2) + \frac{b_{11}}{a_{11}}U_1 - \frac{b_{21}a_{12}}{a_{22}a_{11}}U_2 \quad (2.13)$$

Resolviendo (2.13)

$$x_1(U_1, U_2) = \frac{\frac{b_{11}U_1 - \frac{b_{21}a_{12}}{a_{22}a_{11}}U_2}{1 - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}}}{D} = \frac{\Delta_1(U_1, U_2)}{D}$$

$$x_1(U_1, U_2) = \frac{\Delta_1(U_1, U_2)}{D} \quad (2.14)$$

Con la matriz de los coeficientes de las variables de estado en (2.8) y (2.9) como

$$A = [a_{11} \ a_{12} \ a_{21} \ a_{22}] \quad (2.15)$$

El determinante de (2.15) se define como

$$D = \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (2.16)$$

Y la matriz

$$N_1 = [b_{11}U_1 \ a_{12} \ b_{21}U_2 \ a_{22}] \quad (2.17)$$

Con su determinante

$$\Delta_1(U_1, U_2) = \det N_1 = a_{22}b_{11}U_1 - a_{12}b_{21}U_2 \quad (2.18)$$

Sustituyendo (2.11) en (2.12)

$$x_2(U_1, U_2) = -\frac{a_{21}}{a_{22}} \left[-\frac{a_{12}}{a_{11}} x_2(U_1, U_2) + \frac{b_{11}}{a_{11}} U_1 \right] + \frac{b_{21}}{a_{22}} U_2 \quad (2.19)$$

Resolviendo (2.19) se puede demostrar que

$$x_2(U_1, U_2) = \frac{\Delta_2(U_1, U_2)}{D} \quad (2.20)$$

Con

$$N_2 = [a_{11} \ b_{11}U_1 \ a_{21} \ b_{21}U_2] \quad (2.21)$$

$$\Delta_2(U_1, U_2) = \det N_2 = a_{11}b_{21}U_2 - a_{21}b_{11}U_1 \quad (2.22)$$

Las expresiones (2.14) y (2.20) han quedado, como antes parametrizadas en los controles.

Sin embargo, de igual manera siguen siendo invariables para las condiciones iniciales, proporcionando un control inadecuado para mover el sistema desde el vector de estados iniciales $(x_{o1} \ x_{o2})^T$ hasta el vector final deseado de los estados $(x_{1f} \ x_{2f})^T$.

Así, es evidente que los controles deben ser dependientes de la distancia desde los valores iniciales hasta el valor final deseado para cada uno de las variables de estado lo que redefine el espacio vectorial como un espacio vectorial con norma dos, $\|\cdot\|_2$.

4.2.1.3 El cálculo de variaciones

El problema que se resuelve en la presente tesis es un problema de optimización dinámica.

Todo problema de optimización dinámica tiene los siguientes elementos constitutivos (Escot Mangas, Olmedo Fernández, & del Pozo García, 2002):

1. Un punto de inicio y un punto de finalización.
2. Un conjunto de posibles maneras de ir desde el estado inicial al final.
3. Valores asociados a cada manera de moverse del punto inicial al final o trayectoria
4. Un objetivo bien especificado que permita determinar la mejor manera de moverse o sea la trayectoria óptima permitiendo maximizar o minimizar, según sea el caso, el valor asociado a la trayectoria.

El cálculo de variaciones es la manera clásica de resolver los problemas de optimización dinámica. El problema fundamental del Cálculo de Variaciones (CV) se plantea como sigue:

$$\int_0^T F(t, y, y') dt \quad (2.23)$$

$$\int_0^T F(t, y, y') dt \quad (2.24)$$

Sujeto a las condiciones inicial y final:

$$y(0) = A \quad (2.25)$$

$$y(T) = Z \quad (2.26)$$

Con A, Z y T dados en la formulación del problema e indicados en la figura 2.1.

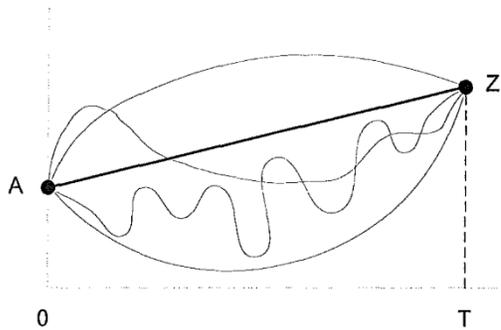


Figura 2.1 Diferentes trayectorias para moverse de manera óptima desde A hasta Z

Se supone que la integral existe y que la misma converge a un valor finito, por otro lado, todas las funciones son continuas y n-diferenciables.

Bajo tales condiciones, será necesario que la ecuación de Euler (2.27) sea exactamente cero, o sea:

$$F_y - \frac{d}{dt} F_{y'} \equiv 0 \quad (2.27)$$

Cuando esto se cumple (Elsoltz, 1969) la trayectoria que verifica el extremo $y = y^*(t)$ es solución de (2.27).

(2.27) puede desarrollarse proporcionando la variante mostrada en (2.28) para el cálculo de la trayectoria que verifica el extremo de $V[y]$ como sigue:

$$F_y - F_{ty'} - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y'' = 0 \quad (2.28)$$

La ecuación de Euler es una EDO no lineal de segundo orden y requiere de dos constantes de integración C_1 y C_2 , las cuales deben ser determinadas aplicando las condiciones de los puntos fijos dados por (2.25) y (2.26).

Y ¿qué pasa cuando una o ambos puntos fronteras no están definidos y pueden variar? Si alguno o ambos puntos varían entonces no se puede aplicar la ecuación de Euler, dando lugar al empleo de las condiciones de transversalidad. Estos otros casos se analizan a continuación de forma breve.

En la mayoría de los problemas de optimización generalmente se considera el comienzo del período, el punto A, como la posición corriente, por lo que se analizan los tres casos que pueden aparecer en un problema de optimización para el valor del punto final. En la figura 2.2 se muestra el caso cuando el estado final puede tener cualquier valor en la recta $t = T$ a la hora de determinar la trayectoria óptima, o sea el instante de tiempo final está definido no así el valor $y(T)$ y cualquier punto en la vertical es aceptado como final. Este tipo de problema de optimización se denomina Problema con recta final vertical (vertical-terminal-line problem).

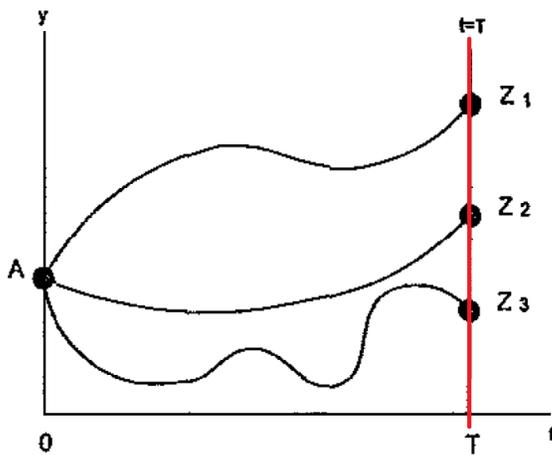


Figura 2.2 El instante final T está fijado, pero hay libertad para elegir el estado final.

Otro caso que se presenta es cuando está fijado el valor final $y = Z$, pero no así el instante final, el cual se puede elegir libremente. Este tipo de problema de optimización se denomina Problema con recta final horizontal (horizontal-terminal-line problem). En la figura 2.3 se muestra un dibujo explicativo del caso analizado.

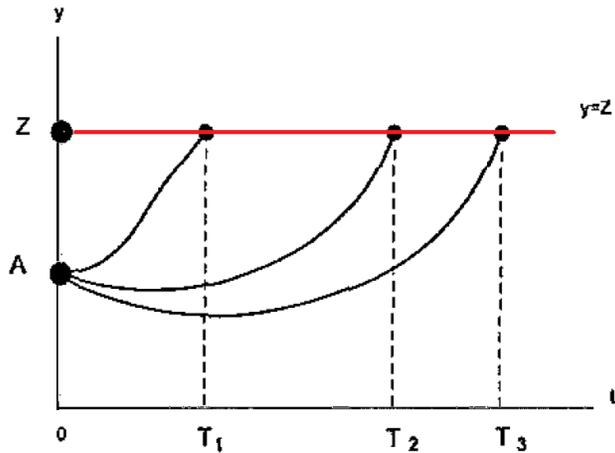


Figura 2.3 Se muestra cómo se fija el valor final y el instante final queda libre para elección.

El último tipo de valor que puede establecerse para el punto final en un problema de optimización dinámica es aquél en el que no están prefijados ni el instante final ni el estado final. Estos valores, sin embargo, están relacionados mediante una función dada, o sea mediante la función restrictiva del tipo $Z = \varphi(T)$. En la figura 2.4 se muestra un dibujo representativo de este caso.

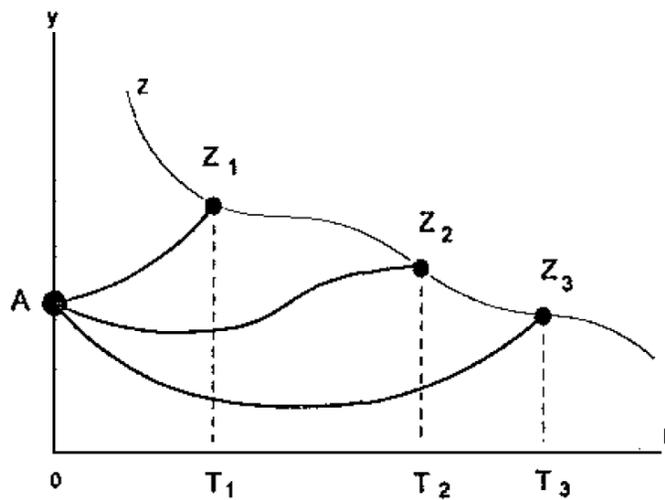


Figura 2.4 Se muestra cómo el valor final y el instante final quedan relacionados por una función dada.

La introducción de este tipo de condiciones finales proporciona las condiciones de transversalidad, las cuales generalmente indican como debe atravesar la trayectoria óptima la curva o recta final.

Como resumen se concluye que la condición de transversalidad puede adoptar una de las siguientes tres maneras, según la condición final:

- a) un único punto prefijado $y(T) = Z$
- b) cualquier punto de una recta dada por $t = T$ o $y = Z$
- c) cualquier punto sobre una curva dada por $Z = \varphi(T)$

En cualquier caso, se debe comprobar si la trayectoria encontrada verifica un extremo, para lo cual se deben aplicar las Condiciones de Segundo Orden (C.S.O.), también reseñadas como Condiciones Suficientes de Extremo (Elsgoltz, 1969).

En la práctica como C.S.O. suelen utilizarse las condiciones suficientes de Concavidad/Convexidad que pueden resumirse como (Escot Mangas, Olmedo Fernández, & del Pozo García, 2002):

- Si la función integral $F(t, y, y')$ es globalmente cóncava en las variables (y, y') , entonces la ecuación de Euler junto a la condición de Transversalidad son suficientes para el máximo absoluto de $V[y]$. La estricta concavidad implicará que y' es el único máximo absoluto.
- Alternativamente, si $F(t, y, y')$ es globalmente convexa en las variables (y, y') , las condiciones de primer orden son suficientes para el mínimo absoluto del problema. La estricta convexidad implica que el mínimo es único.

En este sentido, se dice que una función f es cóncava, si para dos puntos u distinto de v del dominio de la función, se verifica que:

$$\theta f(u) + (1 - \theta)f(v) \leq f[\theta u + (1 - \theta)v] \quad (2.29)$$

El signo \geq implica que la función f es cóncava. Ya que $F(t, y, y')$ tiene segundas derivadas continuas, la condición de concavidad/convexidad se comprueba examinando el signo (definido o semidefinido) de la forma cuadrática:

$$q = F_{yy'} dy^2 + 2F_{yy''} dy dy' + f_{yy''} dy'^2 \quad (2.30)$$

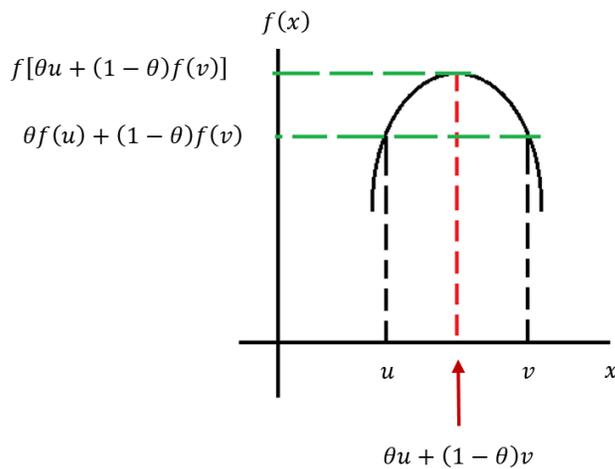


Figura 2.5 Función cóncava (extremo máximo)

$F(t, y, y')$ es cóncava (convexa) en (y, y') , sí y sólo sí, la forma cuadrática q es semidefinida negativa (positiva) en todo el dominio; $F(t, y, y')$ es estrictamente cóncava (estrictamente convexa) si (pero no sólo sí) q es definida negativa (positiva) en todo el dominio.

Estas condiciones son condiciones para la concavidad/convexidad global. En (Escot Mangas, Olmedo Fernández, & del Pozo García, 2002) se proporcionan las condiciones locales de concavidad/convexidad.

4.2.1.4 Teoría del controlador óptimo

En teoría de control matemático, el problema de control óptimo (PCO) es determinar un control que mueva al sistema hacia un objetivo o siga una trayectoria, satisfaciendo un índice de desempeño, el cual puede evaluar diferentes intereses.

Los requerimientos de diseño del control optimal para un sistema descrito en la formulación de ecuación vectorial matricial se fundamentan como sigue:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.31)$$

Donde se denotan los estados del sistema en función del tiempo por

$x(t)$ – vector de estados de dimensión n

Y la variación del vector de estados en el tiempo continuo por

$\dot{x}(t)$ – tasa de variación del vector de estados con el tiempo

La matriz de los estados, que suponemos invariable con el tiempo, o sea de entradas constantes se denota por (1.8) y la matriz $D=0$, con condiciones iniciales y finales

$x(0) = x_0$ – vector de condiciones iniciales

$x(t_f) = 0$ – vector de condiciones finales

Bajo la condición del par (A, B) totalmente estabilizable, se requiere que los estados sean totalmente controlables.

Sintetizar un regulador lineal cuadrático presupone encontrar una función vectorial $u(t)$ tal que minimice el funcional

$$J = \int_0^{\infty} V dt \quad (2.32)$$

Siendo

$$V = x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t) \quad (2.33)$$

(2.33) es una forma cuadrática en los estados y el control. Donde Q y R son matrices de dimensiones adecuadas con Q simétrica y semidefinida positiva y R simétrica pero definida positiva. En casos prácticos es conveniente utilizar matrices diagonales Q y R por simplicidad.

Buscando el mínimo del funcional J , tendremos:

$$J = \int_0^{\infty} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)] dt \quad (2.34)$$

Encontrando el Hamiltoniano

$$H = x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t) + \lambda[Ax(t) + Bu(t)] \quad (2.35)$$

Utilizado a λ como el equivalente a los multiplicadores de Lagrange, se completa el Hamiltoniano al multiplicar el multiplicador por las restricciones de igualdad dadas por (2.31).

Derivando la expresión obtenida (2.35) tendremos:

$$\dot{x} = \frac{dH}{d\lambda} = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.36)$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{dH}{dx} = -Qx(t) - A^T \lambda \quad (2.37)$$

Y como queremos minimizar por la variable de control, tendremos que:

$$0 = \frac{dH}{du} = Ru(t) + B^T \lambda \quad (2.38)$$

El sistema formado entonces se puede reescribir como (2.39):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax(t) + Bu(t) \\ \dot{\lambda} &= -Qx(t) - A^T \lambda \\ 0 &= Ru(t) + B^T \lambda \end{aligned} \quad (2.39)$$

Las dos primeras ecuaciones forman un sistema de variables (x, λ) y la tercera ecuación nos da un valor para el control:

$$u(t) = -R^{-1}B^T \lambda \quad (2.40)$$

Suponiendo que $\lambda = Px$ lo que significa que los multiplicadores de Lagrange son funciones de los estados:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= P\dot{x} \\ u(t) &= -R^{-1}B^T Px \end{aligned} \quad (2.41)$$

La nueva matriz P es ahora la incógnita. Sustituyendo (2.41) en (1.5) tendremos:

$$\dot{x} = Ax(t) - BR^{-1}B^T Px(t) \quad (2.42)$$

Premultiplicando (2.42) por P ;

$$P\dot{x} = PAx(t) - PBR^{-1}B^TPx(t)$$

Y de (2.39) tendremos

$$P\dot{x} = PAx(t) - PBR^{-1}B^TPx(t) = -Qx(t) - A^TPx(t) \quad \mathbf{(2.43)}$$

Mediante agrupación y factorizando, tendremos:

$$(PA - PBR^{-1}B^TP + Q + A^TP)x(t) = 0 \quad (2.44)$$

Ya que buscamos el valor del control que minimiza la función de costo la matriz que premultiplica a los estados debe ser cero para que se verifique (2.44)

$$PA - PBR^{-1}B^TP + Q + A^TP = 0 \quad (2.45)$$

La ecuación (2.45) es la ecuación algebraica de Riccati, cuya solución permitirá determinar el control óptimo de (2.32) con (2.33).

Esta solución tiene la particularidad de solucionar un control óptimo para un modelo en el formalismo de entrada estado de una entrada y una salida (SISO), o sea unidimensional.

De lo que se trata es de solucionar un control óptimo para un modelo en el mismo formalismo de entrada estado, pero con múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO), o sea $n \times m$ -dimensional

4.2.1.5 Modelo matemático del intercambiador de calor

El modelo matemático para establecer el control óptimo se corresponde con el modelo dado en (Bucheli Carpio & Reyes Bacardí, Viscous Fluid Heating Process Identification in a Plate Heat Exchanger, 2021), el cual se reproduce a continuación:

$$A = [x_1 - 0.0005997 - 3.918e - 06 \quad x_2 - 0.0001004 - 0.08559] \quad (2.46)$$

$$B = [Glyc_fl - 7.472e - 06 - 0.00005213 \quad Ethil_fl - 2.65e - 06 \quad 1.521e - 05] \quad (2.47)$$

$$C = [x_1 - 201.5 - 389.2 \quad x_2 \quad 39.31 \quad 0.02814] \quad (2.48)$$

$$D = [Glyc_fl \quad 0 \quad 0 \quad Ethil_fl \quad 0 \quad 0] \quad (2.49)$$

En esta representación del espacio de estados se tiene que (Bucheli Carpio & Reyes Bacardí, Viscous Fluid Heating Process Identification in a Plate Heat Exchanger, 2021) el vector de estados $x(t) = (x_1, x_2)^T$ no tiene sentido físico.

Mientras que el vector de salida $y(t) = (y_1, y_2)^T$ representa la presión de la glicerina y la temperatura de la glicerina (Bucheli Carpio & Reyes Bacardí, Viscous Fluid Heating Process Identification in a Plate Heat Exchanger, 2021).

Para realizar el análisis renombramos las señales de control de manera que se ajusten a la manera de representación en el análisis matemático. El flujo de la glicerina se renombra como $u_1 - \text{flujo de la glicerina}$, y el flujo del ethilenglicol $u_2 - \text{flujo del ethilenglicol}$

4.2.1.6 Comportamiento del modelo matemático

El modelo matemático está representado por el sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias mostrado a continuación:

$$\dot{x}_1(t) = -0.0005997x_1 - 0.0001004x_2 - 0.000007472u_1 - 0.00000265u_2 \quad (2.50)$$

$$\dot{x}_2(t) = -0.000003918x_1 - 0.08559x_2 - 0.00005213u_1 + 0.00001521u_2 \quad (2.51)$$

Con la ecuación de salida:

$$y_1(t) = -201.5x_1(t) + 39.31x_2(t) \quad (2.52)$$

$$y_2(t) = -389.2x_1(t) + 0.02814x_2(t) \quad (2.53)$$

Como se puede observar hay una interacción entre las variables de control y las variables de estado, ya que el vector de control está presente en ambas ecuaciones diferenciales de los estados.

En la figura 2.6 se muestra la respuesta de la salida al aplicar una función del tipo salto, con amplitud uno en ambas entradas de control.

En la figura 2.7 se muestra la respuesta de la salida al aplicar un salto, con amplitud uno en ambas entradas del modelo.

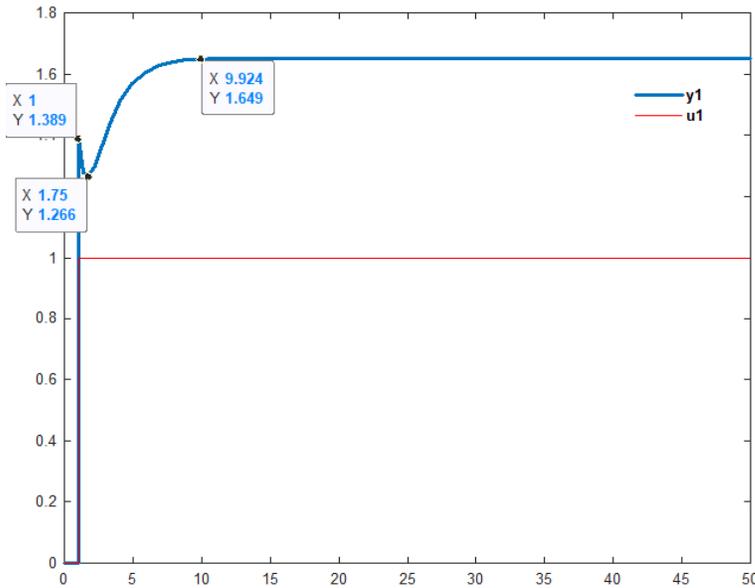


Figura 2.6. Respuesta de la salida $y_1(t)$ al aplicar un salto en cada entrada de control

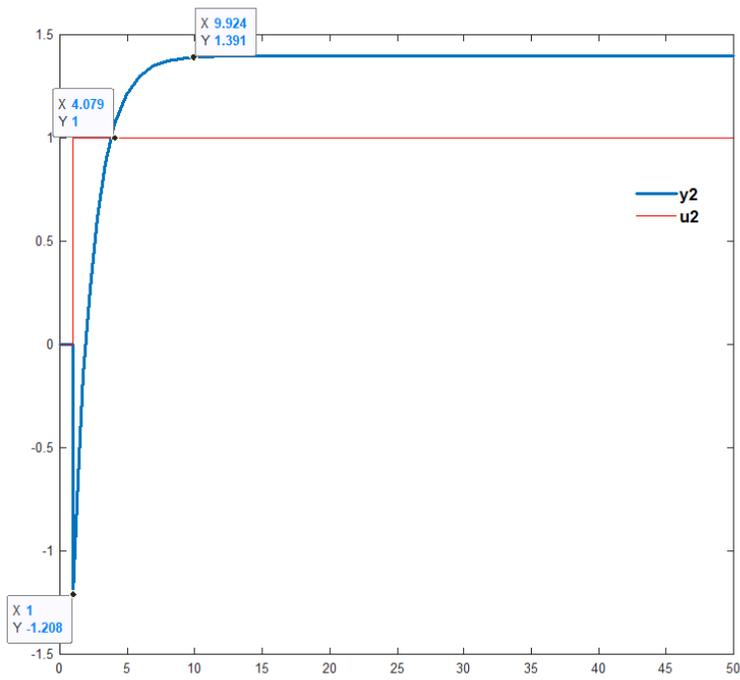


Figura 2.7. Respuesta de la salida $y_2(t)$ al aplicar un salto en cada entrada de control.

4.2.1.7 Análisis del comportamiento del modelo

Como se observa de las figuras 2.6 y 2.7 el modelo matemático responde de diferentes maneras a las funciones tipo salto unitario.

Por ejemplo, en la respuesta de $y_1(t)$ para $u_1(t)$ se observa que la misma reacciona en la misma dirección que la función salto unitario, sin embargo hay una caída de los valores a partir del instante uno, que dura 0.75 unidades, luego de lo cual los valores aumentan hasta alcanzar el valor de $y_1(t = 9.924) = 1.649$ donde se establece definitivamente.

En la respuesta de $y_2(t)$ para $u_2(t)$ se observa que la misma reacciona inicialmente de manera contraria, o sea presenta una respuesta inversa, hasta alcanzar el valor de $y_2(t = 1) = -1.208$

Posteriormente esta respuesta sigue a la señal unitaria tipo salto $u_2(t)$ para establecerse en un valor constante de $y_2(t = 9.924) = 1.391$. Ambas dinámicas presentan un comportamiento exponencial.

CAPÍTULO V

5. Materiales y métodos

5.1. Diseño del Regulador Lineal Cuadrático (LQR) para el modelo de la planta del intercambiador de calor del Laboratorio de Termofluidos de FACI

En el capítulo 2 quedó establecido con (2.41) que una buena manera de formar el control es considerar que el mismo sea función lineal de los estados. Así, probaremos inicialmente cuan beneficioso, desde los puntos de vista de los errores, es diseñar una señal de control a partir de los valores instantáneos de los estados con una estructura lineal.

Como se sabe (Golnaraghi & Kuo, 2017) el diseño del controlador con un control por realimentación de estados presenta el problema del error en estado estacionario desigual de cero.

Esto conlleva directamente a diseñar un controlador con la integración de la magnitud de los errores, como se plantea en (Flores Elejalde & Redrobán, 2021), “de manera que se pueda lograr una regulación con el mínimo de error en el estado estacionario”

El diagrama en bloques del regulador que se diseñará se muestra en la figura 3.1

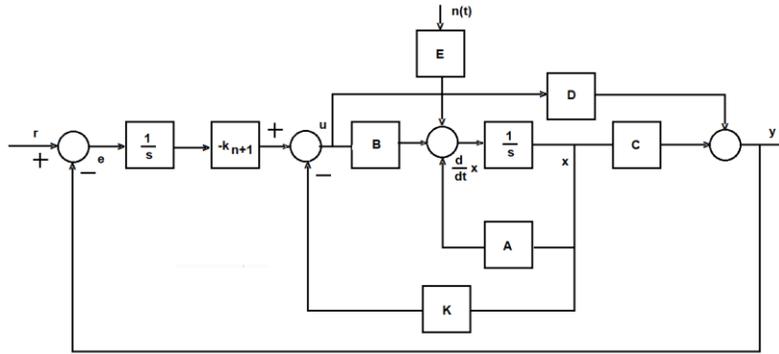


Figura 3.1 Diagrama en bloques del regulador a diseñar.

En este diagrama en bloques se muestran diferentes acciones como son:

- Los bloques de las matrices A, B, C y D dadas por (2.46), (2.47), (2.48) y (2.49)
- Dos bloques de integración
- El bloque K de realimentación de los estados, para la definición de los valores propios de la matriz a lazo cerrado del sistema,
- El bloque $-K_{n+1}$ para la realimentación mediante el integrador de los errores
- El bloque E de inclusión del ruido.
- Los bloques sumadores algebraicos

La magnitud de control se relaciona con las variables de estado según (3.1)

$$u(t) = -Kx(t) - k_{n+1}x_{n+1}(t) - k_{n+2}x_{n+2}(t) \quad (3.1)$$

Donde:

$x(t)$ – vector de estados de dimensión $n = 2$

K – matriz de realimentación de los estados

x_{n+i} – vector de nuevas variables correspondientes con los errores en el control

k_{n+i} – matriz de realimentación de los estados para la integración

$i = 1,2$

$$x_3(t) = Y_{ref1} - x_1 \quad (3.2)$$

$$x_4(t) = Y_{ref2} - x_2 \quad (3.3)$$

Para diseñar el controlador LQR con eliminación de los errores, mediante integración, se amplía el sistema con dos nuevas ecuaciones que describan el comportamiento de la integración adicionada, e_{i1} y e_{i2} del error para cada salida respecto de su referencia.

Las ecuaciones diferenciales ordinarias adicionadas para ampliar el sistema corresponden a la integración de los errores, de manera que las derivadas de estas dos nuevas variables estarán dadas por:

$$\frac{dx_3}{dt} = e_{i1}(t) \quad (3.4)$$

$$\frac{dx_4}{dt} = e_{i2}(t) \quad (3.5)$$

Donde:

$$e_{i1}(t) = Y_{ref1} - x_1(t) \quad (3.6)$$

$$e_{i2}(t) = Y_{ref2} - x_2(t) \quad (3.7)$$

Las ecuaciones (3.6) y (3.6) son los errores en el control con realimentación de los estados que deben ser integrados para su eliminación y obtener el controlador óptimo que minimiza (2.34).

Matlab proporciona una función para encontrar las ganancias dadas en (3.1), o sea para definir el control óptimo;

$$u(t) = -K\vec{x}(t) - k_{n+1}x_{n+1}(t) - k_{n+2}x_{n+2}(t)$$

Esta función es *lqr()*, que se define como sigue:

La función *lqr(Aa,Ba,Qa,Ra)* calcula la matriz de ganancias óptimas K . para los sistemas de tiempo continuo la ley de realimentación de estados (3.1) minimiza la función cuadrática de costo (2.34) sujeta a la dinámica del sistema (2.50) y (2.51) con las ecuaciones de salida (2.52) y (2.53).

Esta función de Matlab además, devuelve la solución de la ecuación algebraica de Riccati asociada (2.45), o sea devuelve la matriz P y los valores propios e del sistema a lazo cerrado usando la función:

$$[K, S, e] = \text{lqr}(A, B, Q, R, N)$$

Donde N – *matriz que relaciona los estados con el control*

La salida S de la función *lqr* es la solución de la ecuación de Riccati para el modelo de espacio de estado explícito equivalente. En todos los casos, cuando se omite la matriz N la función supone que $N=0$ por defecto.

Las características del sistema de ecuaciones deben satisfacer las siguientes condiciones:

El par (A, B) debe ser estabilizable

La matriz R – *definida positiva; $R > 0$*

La matriz Q – *semidefinida positiva; $R \geq 0$*

El cálculo del controlador se realiza empleando el programa en código MATLAB, (Flores Elejalde & Redrobán, 2021) adecuado al problema de control del intercambiador de calor de la planta de termofluidos:

```
%% Calculo de las ganancias de realimentación de estados
```

```
% y de las ganancias de los integradores
```

```
% Evaporador tesis Flores/Redroban.
```

```
% Arreglo para Tesis de Fabián Peñaherrera
```

```
clc, clear all
```

```
% Declaración del espacio de estados
```

```
A=[-0.0005997 -0.0001004;-0.000003918 -0.08559];
```

```
B=[-0.000007472 -0.00000265;-0.00005213 0.00001521];
```

```
C=[-201.5 39.31;-389.2 0.02814];
```

```
D=[0 0;0 0];
```

```
Q=eye(2);
```

```
R=eye(2);
```

```
k=lqr(A,B,Q,R);% para comprobación de la corrida
```

```
%% Cálculo de las ganancias de realimentación integral
```

```
Aa=[A [0 0]' [0 0]';-C [0 0]' [0 0]'];% matriz ampliada
```

```
% para considerar la integración de los errores
```

```
Ba=[B;zeros(2)];% matriz ampliada para el control
```

```
Qa=eye(4);% matriz Q ampliada
```

```
Ra=eye(2);% matriz R ampliada
```

```
ka=lqr(Aa,Ba,Qa,Ra);
```

```
k=ka(:,1:2)% matriz para realimentación de estados
```

```
ki=ka(:,3:4)% matriz para adicionar la integración
```

```
% ===== fin del cálculo de las ganancias =====
```

```
% Después de correr este programa se llama
```

```
% al diagrama Simulink fabianp
```

El diagrama Simulink fabianp.mdl se muestra en la figura 3.2 y los resultados de correr el diagrama Simulink fabianp.mdl se muestran en la figura 3.3, donde como entradas se han dado referencias de $Y_{REF1} = 1$; $Y_{REF2} = 1$

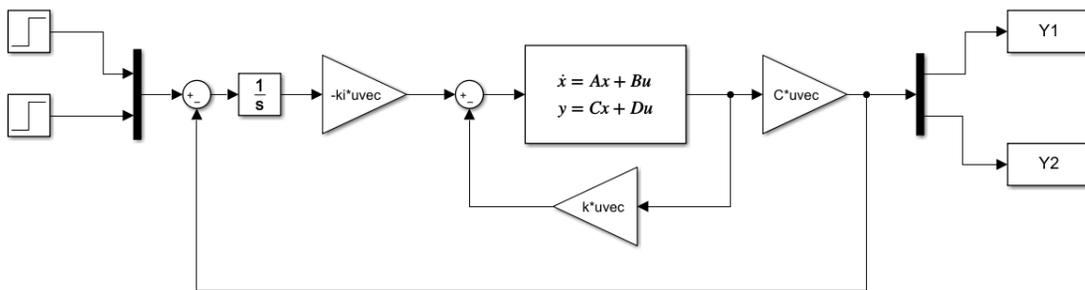


Figura 3.2. Diagrama en bloques de Simulink usado para las simulaciones del controlador LQR

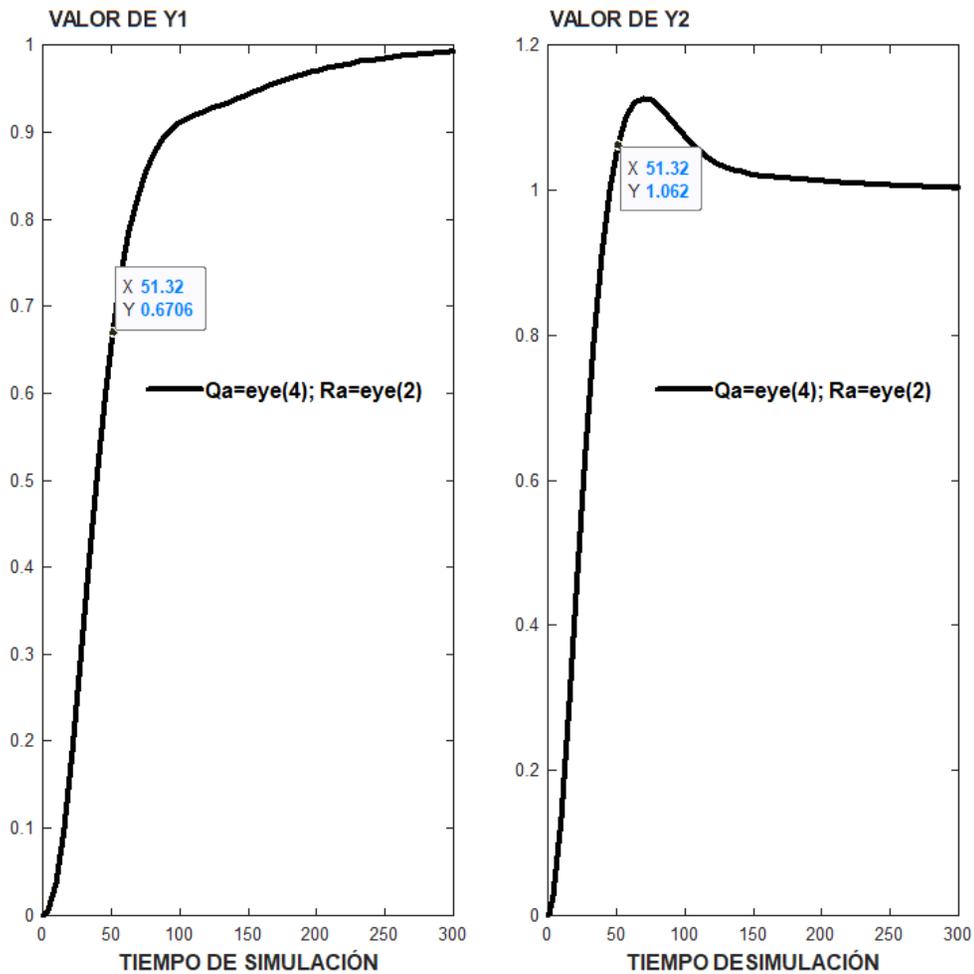


Figura 3.3. Resultados de la corrida del control óptimo LQR con $Q_a = \text{eye}(4)$; $R_a = \text{eye}(2)$

Si se comparan las formas de las respuestas de la figura 3.3 obtenidas a lazo cerrado, con las respuestas a lazo abierto mostradas en las figuras 2.6 y 2.7 es evidente que estas últimas se desarrollan mucho más rápido. Por ejemplo, las respuestas a lazo abierto se desarrollan en 50 unidades de tiempo, sin embargo, las respuestas con el control óptimo para ese mismo intervalo no han alcanzado su valor de establecimiento.

Esto se debe a que las matrices Q_a y R_a son matrices identidad cada una y que en general por tener esos valores en sus diagonales el controlador óptimo busca el gasto mínimo de energía, sin importar la rapidez de la respuesta a la función salto unitario de referencia.

Un nuevo ajuste de la matriz $R_a = [0.1 \ 0 \ 0 \ 0.1]$ proporciona las respuestas mostradas en la figura 3.4. Como se observa estas respuestas son más rápidas lo cual indica que la exigencia es que los estados alcancen más rápido su valor de establecimiento sin importar el gasto de energía para el control.

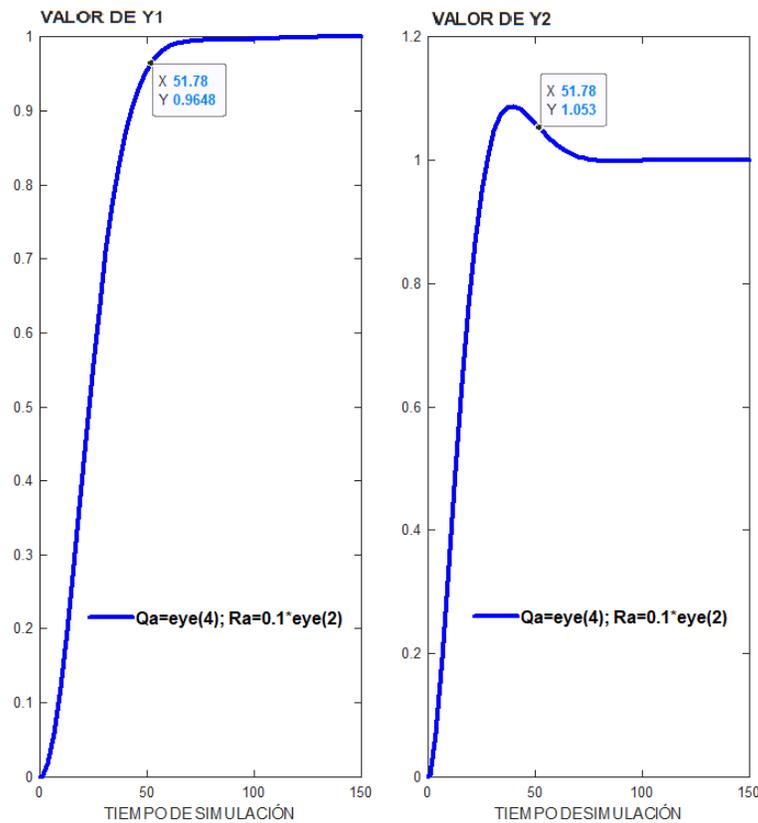


Figura 3.4. Resultados de la corrida del control óptimo LQR con $Q_a = \text{eye}(4)$; $R_a = 0.1 * \text{eye}(2)$

Finalmente, un tercer ajuste proporciona un mejor desempeño del controlador óptimo, poniendo de manifiesto que la relación de los elementos de las diagonales de las matrices Q_a y R_a debe ser grande si se quiere que el sistema alcance rápidamente los valores de establecimiento de las variables de estado.

Si, por el contrario, lo que se desea es minimizar el gasto de energía en el sistema esa relación debe ser invertida, o sea los elementos de las diagonales de las matrices R_a y Q_a debe ser grande.

En la figura 3.5 se muestra el resultado de seguir ajustando las matrices Q_a y R_a de manera que $Q_a=1.1*\text{eye}(4);R_a=0.01*\text{eye}(2)$

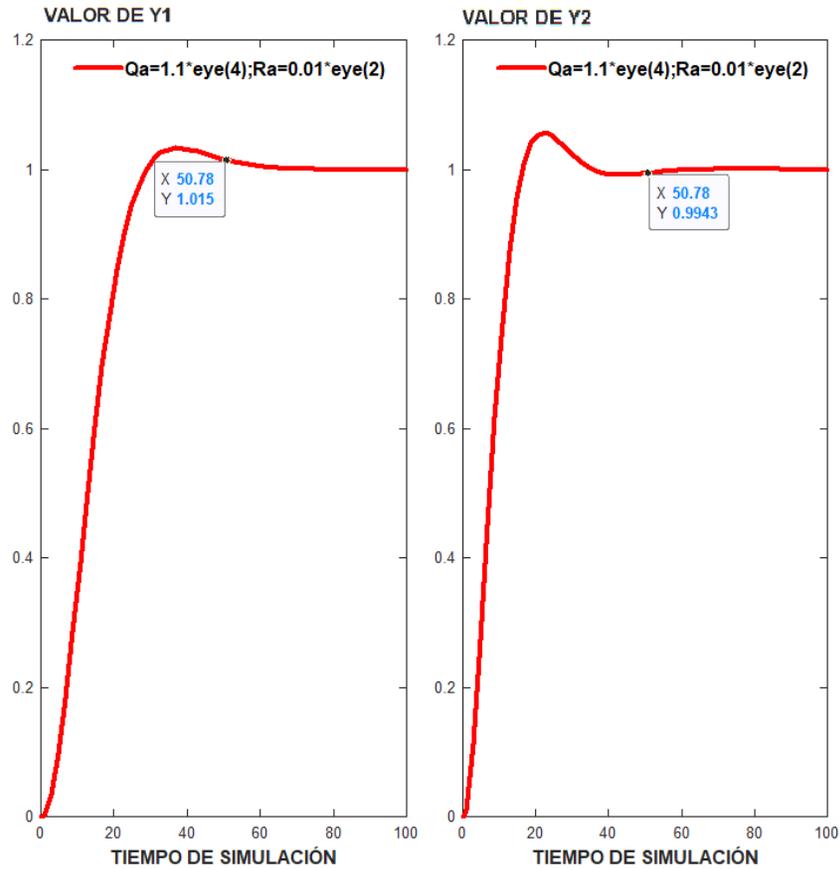


Figura 3.5. Resultados de la corrida del control óptimo LQR con $Qa=1.1 \cdot \text{eye}(4); Ra=0.01 \cdot \text{eye}(2)$

5.2 Diseño del controlador óptimo para la planta del intercambiado de calor del Laboratorio de Termofluidos de FACI

La matriz de ganancias de realimentación de estados proporciona las siguientes entradas:

$$k = 1.0e + 04 * (-2.6841 \quad -0.0554 \quad -2.9432 \quad 0.3016) \quad (3.8)$$

(3.8) se corresponde con la línea de instrucción del programa principal dada como:

`k=ka(:,1:2)% matriz para realimentación de estados`

En esta matriz cada fila proporciona los coeficientes de la suma de los estados para formar el control $u'(t) = -k(x_1(t) \ x_2(t)) = (u'_1(t) \ u'_2(t))$ que logra un control estabilizante. Sin embargo, este vector de control no proporciona error cero en el estado estacionario.

Para evitar eso, como se indicó, se requiere emplear integradores en cada variable controlada que integren los errores respecto de las referencias de entrada para controlar los valores de las retenciones de niveles en cada vaso evaporador y la concentración del producto final.

La ley de control para la integración, u'' es el vector dado por el producto de la matriz de las ganancias de integración por los errores en la regulación o sea:

$$u'' = k_i(Y_{ref1} \ Y_{ref2}); \quad k_i = (1.8152 \quad -10.3298 \quad -10.3298 \quad -1.8152); \quad (3.9)$$

(3.9) se corresponde con la línea de instrucción del programa principal dada como:

`ki=ka(:,3:4)% matriz para adicionar la integración`

Se define la siguiente expresión matemática como ley de control dinámica para el controlador LQR:

$$u = u' + u'' = -k(x_1(t) \ x_2(t)) - k_i(Y_{ref1} \ Y_{ref2}) \quad (3.10)$$

La programación del bloque de espacio de estados (State-space block), mostrado en la figura 3.6 se indica a continuación:

Las matrices A y B son las dadas en el programa principal de cálculo del control. Para realimentar los estados en el campo de la matriz C de la ventana “Block Parameters: State-Space” se programado la matriz identidad de orden 2, para que tenga la misma dimensión que la matriz A del sistema.

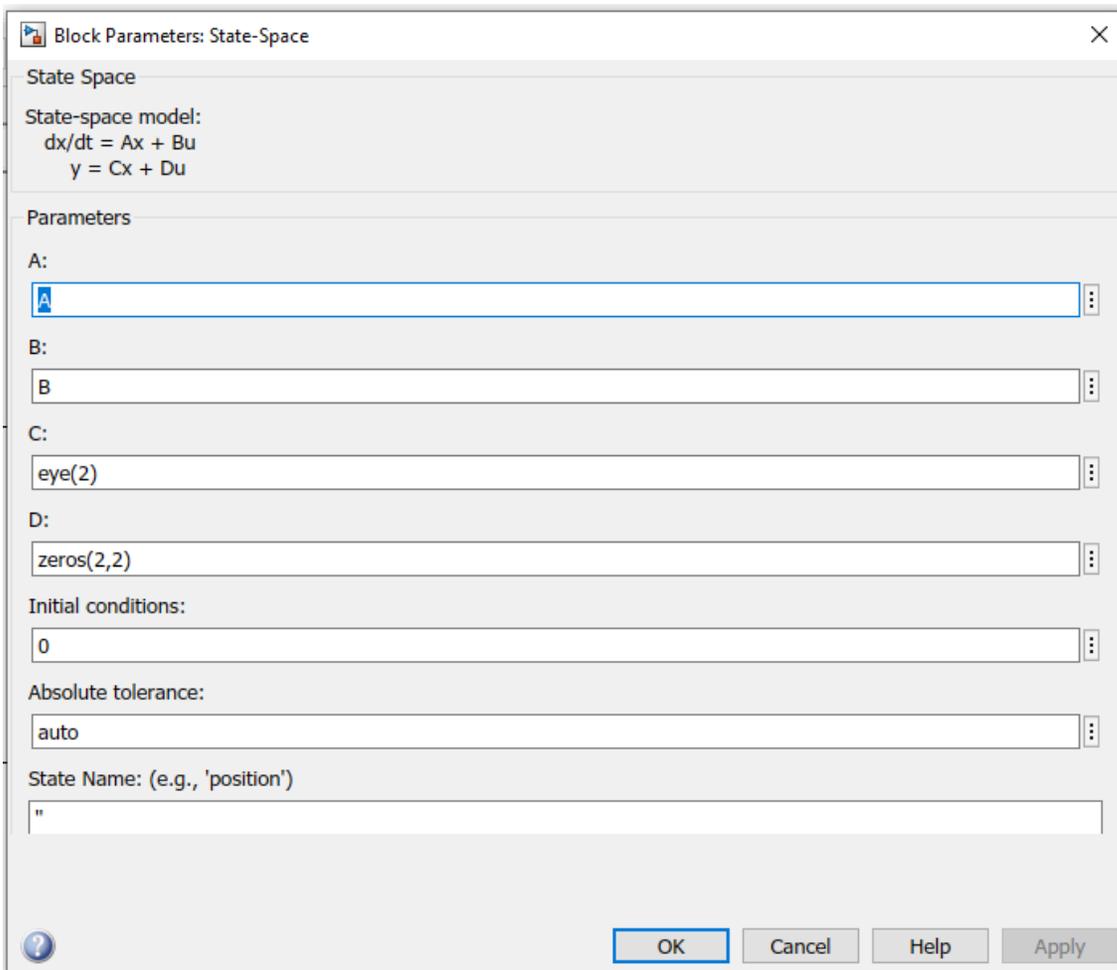


Figura 3.6 Programación del bloque State-space

Para formar el vector de salida Y_1, Y_2 , la matriz C de salida de la representación en el espacio de estados se tiene a continuación del mencionado bloque.

La matriz D se programa como una matriz de 2x2 para que se corresponda con el resto de las matrices del modelo.

Los bloques de ganancia "Gain" se programan como bloques multiplicadores de matrices por vectores del estado y el vector de los errores del control.

A continuación, se diseña un biorreactor a escala industrial con agitación en baño para la producción de etanol con *Saccharomyces cerevisiae*:

- El volumen del biorreactor, $V_R = 70 \text{ m}^3$
- El volumen de una fase líquida, $V_L = 52.5 \text{ m}^3$
- El diámetro del biorreactor, $d_R = 3,1 \text{ m}$
- El diámetro del agitador, $d_s = 0,97 \text{ m}$
- La velocidad de agitación, $N = 2.5 \text{ s}^{-1}$
- Número de impulsores, $n_l = 4$
- El caudal másico del agua de refrigeración, $m_c = 7,731 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$
- Superficie térmica, $A = 40 \text{ m}^2$
- Tiempo de fermentación, $t_f = 11.4 \text{ h}$ y tiempo de funcionamiento, $t_{op} = 4 \text{ h}$
- Producción de etanol por lotes, $m_p = 3623 \text{ kg}$
- Número de baños al año es igual a 514
- Producción anual de etanol, $m_p = 1862222 \text{ kg}$

Como se ha investigado anteriormente, *saccharomyces cerevisiae* se utiliza de forma extensiva en fermentaciones por lotes para convertir la glucosa en etanol para la producción de bebidas y biocombustibles. La fermentación de la glucosa en etanol muestra una serie de reacciones enzimáticas coordinadas. Este proceso es interiormente equilibrado y termodinámicamente deseable siempre que las enzimas celulares utilicen el nucleótido fosforilado neto producido a partir de la fosforilación a nivel de sustrato. El modelo matemático se basa en la combinación de

conocimientos de consideraciones de ingeniería - fenómenos microbianos que incluyen la estequiometría, la termodinámica del cultivo de las células, la cinética microbiana y los procesos físicos (fenómenos de transporte) como la mezcla, el consumo de energía, la transferencia de masa y de calor. Valores de los parámetros cinéticos, μ_{max} , K_S , k_p para la descripción de la cinética microbiana y a continuación se aplicaron en la información de la literatura para la descripción de la cinética microbiana y su posterior aplicación en la modelización matemática. Por desgracia, es físicamente imposible mantener las mismas condiciones de proceso para los biorreactores a escala de laboratorio, a escala piloto y a escala industrial. La razón es que los procesos físicos dependen directamente de la escala y los metabólicos indirectamente. Aunque el escalado de los biorreactores no sólo implica de ingeniería, sino también consideraciones económicas, el siguiente texto y discusión se limitará a los aspectos de ingeniería del escalado. Del cálculo hemos obtenido la producción de etanol por lotes, 3623 kg/l en todo el medio, la producción de etanol por año 1 806 991 kg/año y para cuatro lotes 7 228 ton/año. Con la extracción de 3623 kg/lote, la producción anual es de 1 862 222 kg/año, pero sin stripping, 3982 Kg/lote, y la producción al año 1 971 151 kg/año, el tiempo para un lote es la suma del tiempo de producción y el tiempo de entrega es de 15,4 horas con decapado y sin decapado es de 16 horas. Coste de la inversión se estimó un coste de 2105 dólares para el equipo principal y se calculó un capital total para la fermentación de 894.650 dólares. Con cambio del volumen del reactor o del volumen de una fase líquida, aumenta o disminuye proporcionalmente la producción de etanol, por ejemplo, si el volumen del reactor se supone $60 m^3$, proporcionalmente a la producción por lotes de etanol, $m_p = 3105 kg/l$ en todo el medios, la producción anual de etanol 1 548 849 kg/año, y para cuatro lotes 6195 ton/año. La tasa de aireación, $V_G = 0,225$, Volumétrico Coeficiente de transferencia de masa del etanol (utilizado en el balance de materia del etanol) ($k_L a_D$) es $0,076 s^{-1}$ obtenido. La disminución de la concentración inicial de la concentración de glucosa inicial de a 150 g/L influye proporcionalmente en el flujo de masa del agua de refrigeración a 7,70 kg/s, la cantidad molar de glucosa consumida durante la producción de etanol, 42 kmol, calor de reacción, 46 635 J/s y otros valores. Nuestros zapatos de cálculo

que se calculado según los métodos de escalado correctos. Se espera que los resultados de este estudio proporcionen información sobre el rendimiento del proceso, optimizarlo y ayudar al diseño de procesos para la producción a gran escala de etanol con levaduras *Saccharomyces cerevisiae* en condiciones anaeróbicas.

En definitiva, la presente investigación ha demostrado la importancia de algunos parámetros de fermentación (fenómenos microbianos microbianos) para mejorar la tecnología de fermentación alcohólica [23] del biorreactor a escala industrial con agitación en baño para la producción de etanol con *Saccharomyces cerevisiae*. Los biorreactores serán fundamentales para el desarrollo de muchos productos nuevos de alto valor y de productos de alto valor y la sustitución de los procesos existentes basados en productos químicos. La selección y el diseño adecuados del biorreactor determinarán el bioproceso comercial óptimo y la correspondiente inversión de capital. El biorreactor no debe considerarse como una unidad aislada, sino como parte de una unidad de operación integrada con una unidad superior (preparación) y una unidad inferior (separación) [24].

Las simulaciones pueden utilizarse para el análisis de costes del biorreactor de diseño óptimo [25]. En posteriores investigaciones, es posible centrarnos en la visualización y el análisis describe el proceso utilizando la interferometría holográfica [26]

El presente estudio se realiza bajo los lineamientos establecidos en la línea de investigación denominada Desarrollo Productivo de la Facultad de Ciencias e Ingenierías, en la sublínea de investigación denominada Optimización de Procesos Productivos y Logísticos.

5.2. Tipo de investigación

El tipo de investigación que se desarrolla tiene que ser exhaustiva y excluyente, por lo que solo tendremos en cuenta aquellas que se consideran operativas, que son las siguientes:

- Según la intervención del investigador (de observación, de experimentación),
- Según la planificación de la toma de datos (retrospectivo o prospectivo),
- Según el número de ocasiones en que mide la variable de estudio (transversal o longitudinal),
- Según el número de variables de interés (descriptivo o analítico)

A partir de esta clasificación se determina que el tipo de investigación es:

- De experimentación: ya que estamos excitando al modelo matemático para determinar su desempeño en el control del intercambiador de calor de la planta de termofluido.
- Por otro lado, los datos para analizar el desempeño del controlador LQR se analizan como la respuesta a diferentes estímulos al modelo matemático del intercambiador de calor, por lo que no están planificados, luego la investigación se clasifica como prospectiva.
- Ya que las variables serán medidas varias veces, el estudio será longitudinal,
- Según el número de variables de interés, cuatro variables que conforman dos vectores de pares de valores del error y su índice de desempeño y el vector de control, el estudio es analítico.

5.3. Población

La población empleada para determinar el modelo matemático base para este trabajo de titulación se puede encontrar en (Bucheli Carpio & Reyes Bacardí, Viscous Fluid Heating Process Identification in a Plate Heat Exchanger, 2021)

5.4. Muestra

Para realizar el muestreo de forma preliminar se obtuvieron los datos mediante un sistema de adquisición de datos automatizado, el cual está implementado en la planta de estudio. Esa información puede encontrarse en (Bucheli Carpio & Reyes Bacardí, Diseño de un control inteligente en base a Redes Neuronales para el control de temperatura y presión en un intercambiador de calor del Laboratorio

Didactico de Fluidos Viscosos. Informe de Tesis, 2016) y no es propia de este trabajo de investigación.

5.5. Fuentes de información primarias y secundarias

Las fuentes primarias de información empleadas para llevar a cabo la investigación sobre el control óptimo fueron (Bucheli Carpio & Reyes Bacardí, Viscous Fluid Heating Process Identification in a Plate Heat Exchanger, 2021) para estudiar el comportamiento del modelo encontrado por los autores, (Bucheli Carpio & Reyes Bacardí, Diseño de un control inteligente en base a Redes Neuronales para el control de temperatura y presión en un intercambiador de calor del Laboratorio Didactico de Fluidos Viscosos. Informe de Tesis, 2016) para estudiar el comportamiento del control con redes neuronales adaptando los parámetros de un control del tipo Proporcional, Integral y Derivativo (PID) en presencia de variaciones de la temperatura y la presión en el intercambiador de calor de placas.

Como fuentes secundarias se utilizaron las siguientes monografías: (Bequette, 2002), (Skogestad & Postlethwaite, 2001) y (Albertos & Sala, 2004) los cuales se han empelado para profundizar en los conceptos de control u control óptimo.

6. Resultados y discusión

Para la discusión de los resultados se emplean las posibilidades que proporciona el bloque Scope de Simulink en el cual se pueden realizar diferentes mediciones en el dominio del tiempo. Las mediciones realizadas se corresponden con el tiempo de crecimiento de las respuestas, el valor pico alcanzado por ellas y el instante en el cual se logra y el tiempo en el cual se puede considerar que el proceso de transito de un estado a otro a terminado.

A continuación, se muestran las mediciones realizadas con las facilidades del bloque mencionado.

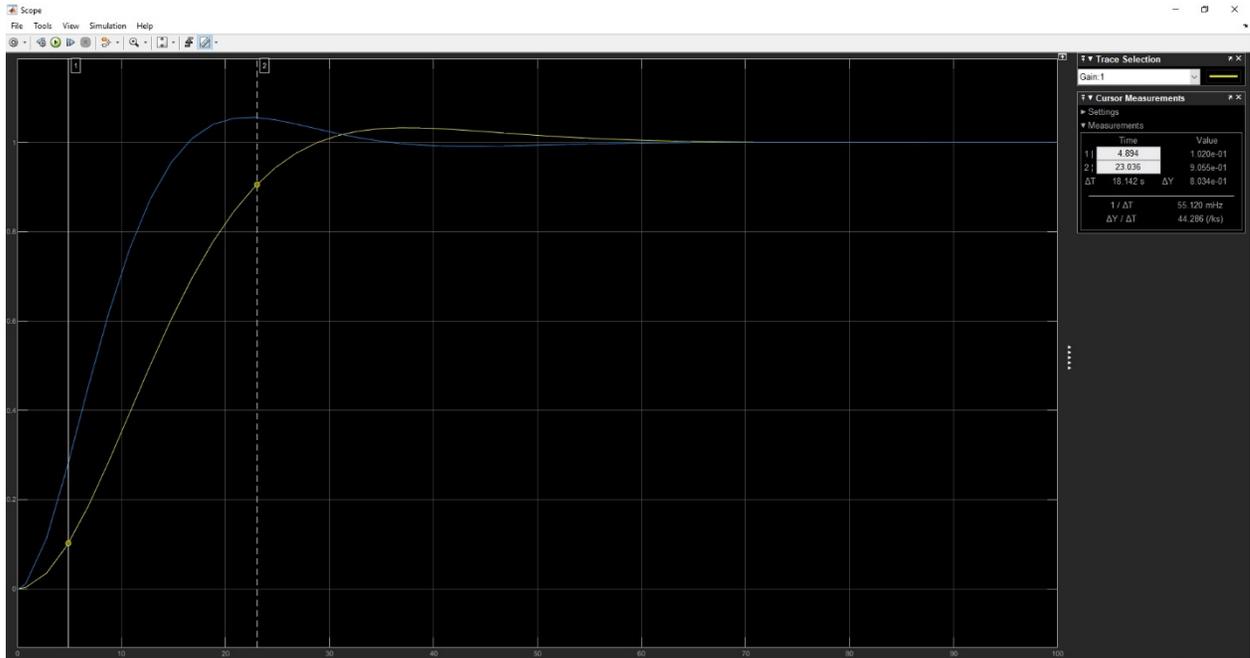


Figura 3.7 Medición del tiempo de subida de la respuesta Y_1

En la figura 3.7 se muestra a la derecha una columna con diferentes mediciones. Para el caso el tiempo de subida viene dado por $\Delta T = 18.142 \text{ s}$ lo cual es un tiempo aceptable para los procesos térmicos en la planta de termofluidos.

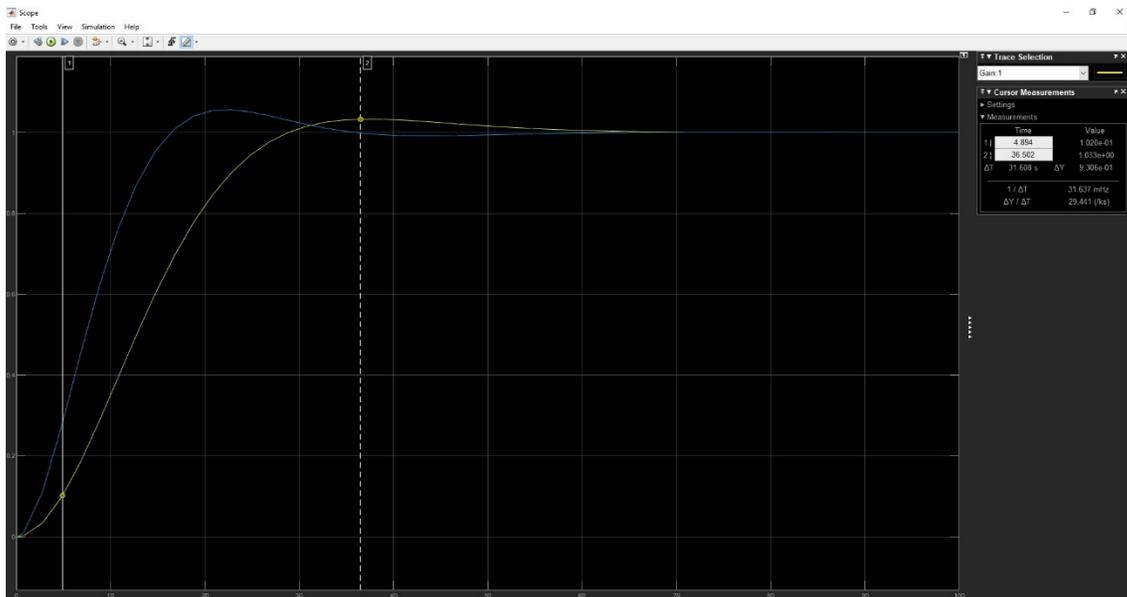


Figura 3.8 Medición del valor pico de la respuesta y su instante de tiempo de ocurrencia.

En la figura 3.8 se muestran las mediciones realizadas del mayor valor alcanzado en esta respuesta el cual es $Y_{max1} = 1.033$, así como el instante de tiempo en el cual ocurre $t_{vp} = 36.502s$.

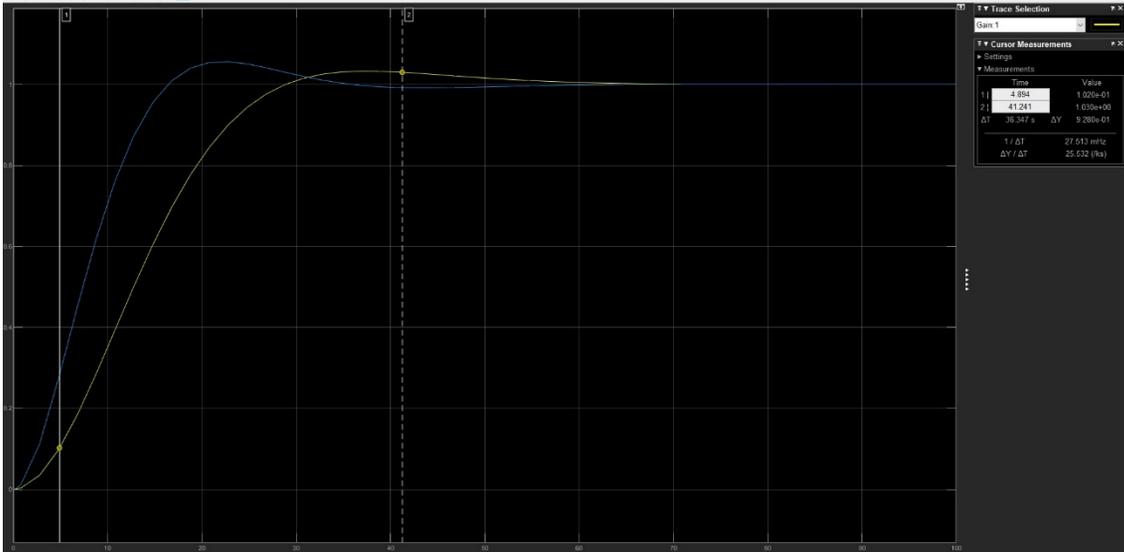


Figura 3.9 Medición del tiempo de establecimiento de la respuesta.

En la figura 3.9 se muestra la medición realizada del tiempo de establecimiento, considerado como el instante de tiempo cuando la respuesta entra por primera vez en el rango de valores $(1 \pm 3\%) Y_{final}$ y no sale del rango mencionado. En esta respuesta el valor es $t_{est} = 41.241s$

Para la respuesta Y_2 se obtuvieron los siguientes valores:

- tiempo de subida dado por $\Delta T = 11.160s$
- valor pico de la respuesta dado por $Y_{max1}(23.163s) = 1.056$
- valor del tiempo de establecimiento es $t_{est} = 28.834s$

La medición de estos valores se muestra en las figuras 3.10, 3.11 y 3.12 realizadas todas con el mejor valor alcanzado para $Q_a=1.1 \cdot \text{eye}(4)$; $R_a=0.01 \cdot \text{eye}(2)$ y medidos con el mismo bloque Scope de Simulink.

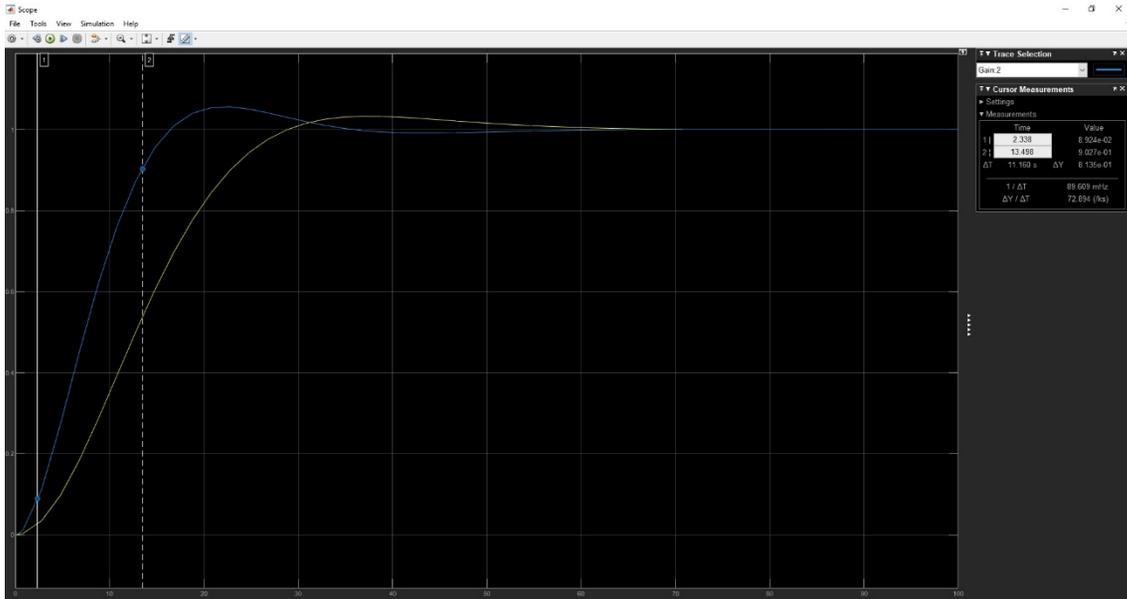


Figura 3.10 Medición del tiempo de subida de la respuesta Y_2

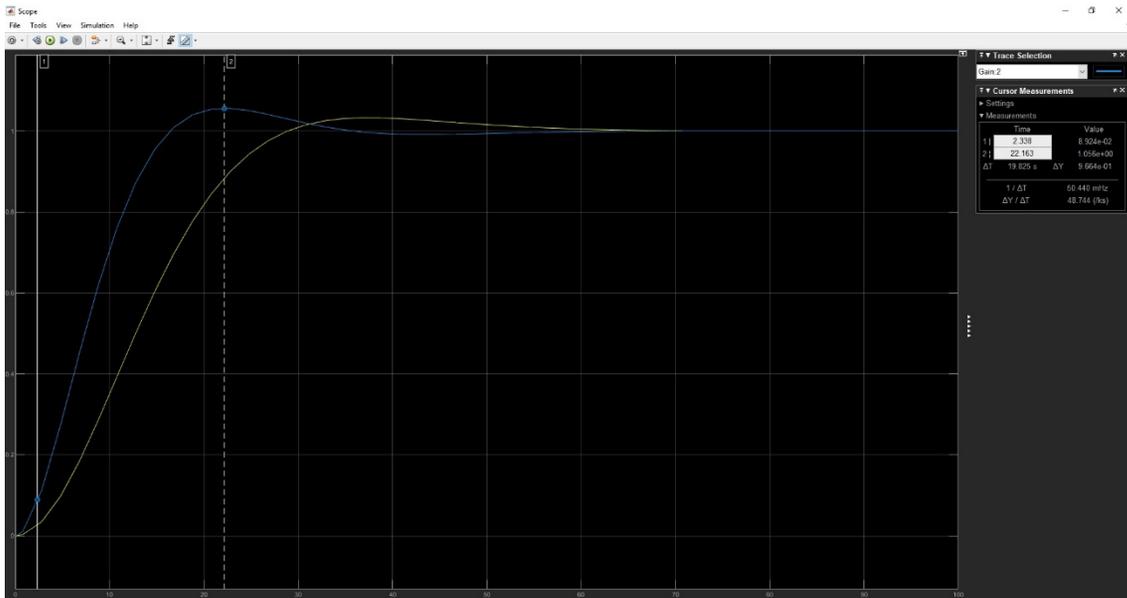


Figura 3.11 Medición del valor pico para Y_2 y su instante de ocurrencia

Los valores obtenidos caracterizan la dinámica del sistema alcanzada con el controlador LQR.

Retornando al proceso original, modelado por el sistema de ecuaciones descrito por (2.46), (2.47), (2.48) y (2.49) los valores obtenidos resultan ser aceptables dado que se corresponden con procesos térmicos para la variable de salida Y_1 y con procesos de diferentes escalas de tiempo de los térmicos como son los procesos de presión, Y_2

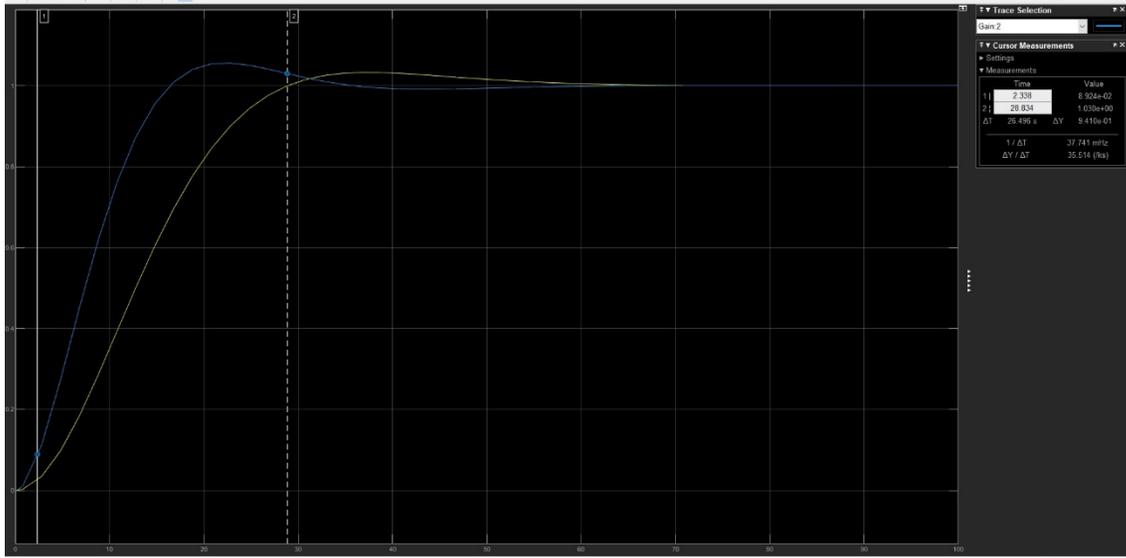


Figura 3.12 Medición del tiempo de establecimiento del proceso de cambio para Y_2 .

7. Conclusiones y recomendaciones

Conclusiones.

La secuencia de ajustes de las entradas de las matrices Q_a y R_a mostrada por las figuras 3.3, 3.4 y 3.5 proporcionan la certeza que:

- a. Las matrices simétricas Q_a semidefinida positiva y R_a definida positiva son la manera que brinda la Teoría de Control LQR para ajustar los procesos de tránsito en los sistemas de múltiples entradas y salidas de manera óptima,
- b. Los grandes valores de la diagonal principal de la matriz Q_a proporcionan rapidez al sistema de control, de manera de alcanzar rápidamente el valor de establecimiento. Por el contrario, pequeños valores proporcionan respuestas lentas.
- c. La matriz Q_a es la matriz que pondera los estados, o sea prioriza la optimización desde los puntos de vista de los estados y alcanzar un off set cero de manera rápida y sin oscilaciones.
- d. Los grandes valores de la diagonal principal de la matriz R_a proporcionan dinámicas lentas en el sistema de control, de manera de alcanzar lentamente el valor de establecimiento, pero ahorrando energía. Por el contrario, pequeños valores proporcionan respuestas más rápidas aumentando el gasto energético del sistema de control y aumentando la sobre regulación en las respuestas.

El objetivo principal propuesto para la realización de esta investigación:

- Obtener el control óptimo de modelos matemáticos complejos mediante el método de control óptimo de funcionales para su implementación en un proceso de trasvase de termofluidos.

se ha cumplido, así como los objetivos específicos:

- Identificar las características algebraicas de los modelos n-dimensionales controlables, observables y estabilizables mediante la formulación de matrices para definir la dinámica de los procesos modelados,

- Determinar el grado de interrelación entre las variables a observar en el modelo matemático empleando la revisión de las entradas de la matriz de los estados y de control,
- Calcular y emplear los valores singulares de la matriz e obtenida con la función lqr para el diseño del control óptimo,
- Comparar los resultados obtenidos con los métodos de control optimal del cálculo variacional en modelos n-dimensionales complejos
- Aplicar el mejor resultado de optimización en un ejemplo de modelo matemático de trasvase de fluidos viscosos calientes para implementar en la planta de termofluidos.

Recomendaciones.

Considerando que el proceso de ajuste de los valores de las entradas de las matrices Qa y Ra puede resultar en un proceso largo, similar al de prueba y error empleado para ajustar los controladores clásico del tipo PID, se sugiere:

- Continuar la investigación del diseño del controlador de la planta de termofluidos aplicando la Inteligencia Artificial, en específico los Algoritmos Genéticos para ajustar de manera rápida y en línea tales valores,
- Implementar los resultados obtenidos en este trabajo de investigación en la planta de termofluidos de la FACI.

8. Referencias bibliográficas.

- Albertos, P., & Sala, A. (2004). *Multivariable control systems: an engineering approach*. Springer.
- Almeida Salazar, B. A., Mora Valverde, F. D., & Reyes Bacardí, A. (2018). *Diseño de un controlador difuso multivariable para el control de un intercambiador de calor en una planta didáctica*. Guayaquil: Repositorio de tesis de maestría MACI FIEC ESPOL.
- Bequette, B. W. (2002). *Process control, modeling, design and simulation*. 1st ed. Prentice Hall PTR.
- Bryson, A. E. (1996). Optimal Control-1950 to 1985. *IEEE Control Systems Magazine* Vol.16, 26-33.
- Bucheli Carpio, L. Á., & Reyes Bacardí, A. (2016). *Diseño de un control inteligente en base a Redes Neuronales para el control de temperatura y presión en un intercambiador de calor del Laboratorio Didactico de Fluidos Viscosos*. Informe de Tesis. Guayaquil.
- Bucheli Carpio, L. Á., & Reyes Bacardí, A. (2021). Viscous Fluid Heating Process Identification in a Plate Heat Exchanger. *Ecuador Technical Chapters Meeting Fifth edition*, 375-382.
- Dongshu, W., Dapei, T., & Lei, L. (2017). *Particle swarm optimization algorithm: an overview*. Springer-Verlag.
- Dongshu, W., Dapei, T., & Lei, L. (2017). *Particle swarm optimization algorithm: an overview*. *Soft Comput.* Springer-Verlag.
- Elsgolts, L. (1969). *Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional*. Moscú: Mir.
- Escot Mangas, L., Olmedo Fernández, E., & del Pozo García, E. M. (2002). *eprints.ucm.es*. Obtenido de <https://eprints.ucm.es/id/eprint/33921/1/0208.pdf>

- Flores Elejalde, M., & Redrobán, J. (2021). *Diseño del controlador predictivo multivariable para el control de un evaporador de múltiples efectos*. Guayaquil: MACI, FIEC, ESPOL.
- Goldberg, D. E. (1989). *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*. Addison-Wesley.
- Golnaraghi, F., & Kuo, B. C. (2017). *Sistemas de Control Automático*. McGraw Hill.
- Junjie, Y. (2018). A Review of Industrial Heat Exchange Optimization. *Earth Environ. Sci.*
- Kamien, M. I. (2013). *Dynamic Optimization: the Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*. Dover Publications.
- Kirk, D. E. (1970). *Optimal Control Theory. An Introduction*. Prentice-Hall, Inc.
- Luenberger, D. G. (1979). "Optimal Control". *Introduction to Dynamic Systems*. John Wiley & Sons.
- Merino Pilay, J. E., Olmedo, F. E., & Reyes Bacardí, A. (2019). *Diseño de un controlador predictivo para el control de la temperatura y la presión en Procesos con Fluidos Viscosos*. Guayaquil: Repositorio de tesis de maestría MACI FIEC ESPOL.
- Ogata, K. (2010). *Ingeniería de Control Moderna*. Madrid: Pearson Education S. A.
- Ross, I. (2015). *A primer on Pontryagin's principle in optimal control*. San Francisco: Collegiate Publishers.
- Ross, I. M., Proulx, R. J., & Karpenko, M. (2020). *An Optimal Control Theory for the Traveling Salesman Problem and its Variants*. arXiv:2005.03186.
- Sánchez Aquino, J. M., Flores Tomalá, D., & Reyes Bacardí, A. (2016). *Diseño de detectores de fallo de un actuador tipo válvula de control y del controlador de reconfiguración del control ante fallos en una planta piloto*. Guayaquil: Repositorio de tesis de maestría MACI FIEC ESPOL.
- Sargent, R. W. (2000). Optimal Control. *Journal of Computational and Applied Mathematics.*, 361-371.
- Skogestad, S., & Postlethwaite, I. (2001). *Multivariable feedback control. analysis design. 2 nd ed*. Wiley and Sons.

Yunfeng, X., Ping, F., & Ling, Y. (2013). A Simple and Efficient Artificial Bee Colony Algorithm. *Mathematical Problems in Engineering*.

