



**UNIVERSIDAD ESTATAL DE MILAGRO
VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO**

MAESTRÍA EN MATEMÁTICA, MENCIÓN MODELACIÓN MATEMÁTICA

Tema:

MÉTODO PARA LA RECONSTRUCCIÓN DEL GRIN EN CRISTALINOS

AUTOR:

ORTIZ PÉREZ JONATHAN ARTURO

DIRECTOR TFM: VALENZUELA COBOS JUAN DIEGO

MILAGRO, AGOSTO 2023

ECUADOR

ACEPTACIÓN DEL TUTOR

Yo, Valenzuela Cobos Juan Diego, en mi calidad de director del trabajo de titulación, elaborado por Jonathan Arturo Ortiz Pérez, cuyo tema es **MÉTODO PARA LA RECONSTRUCCIÓN DEL GRIN EN CRISTALINOS**, que aporta a la Línea de Investigación Sociedad de la Información: Gestión, Medios y Tecnología, previo a la obtención del Grado de Magíster en Matemática, Mención Modelación Matemática. Trabajo de titulación que consiste en una propuesta innovadora que contiene, como mínimo, una investigación exploratoria y diagnóstica, base conceptual, conclusiones y fuentes de consulta, considero que el mismo reúne los requisitos y méritos necesarios para ser sometido a la evaluación por parte del tribunal calificador que se designe, por lo que **ACEPTO**, a fin de que el trabajo sea habilitado para continuar con el proceso de titulación de la alternativa de Informe de Investigación de la Universidad Estatal de Milagro.

Milagro, 12 de marzo del 2023

Valenzuela Cobos Juan Diego

C.I: 0927981670

CERTIFICACIÓN DE LA DEFENSA



VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO DIRECCIÓN DE POSGRADO CERTIFICACIÓN DE LA DEFENSA

El TRIBUNAL CALIFICADOR previo a la obtención del título de **MAGÍSTER EN MATEMÁTICA CON MENCIÓN EN MODELACIÓN MATEMÁTICA**, presentado por **ING. ORTIZ PEREZ JONATHAN ARTURO**, otorga al presente proyecto de investigación denominado **"MÉTODO PARA LA RECONSTRUCCIÓN DEL GRIN EN CRISTALINOS"**, las siguientes calificaciones:

TRABAJO DE TITULACION	80.00
DEFENSA ORAL	40.00
PROMEDIO	100.00
EQUIVALENTE	Excelente



RAFAEL SELEYMAN
LAZO SULCA

Mgti. LAZO SULCA RAFAEL SELEYMAN
PRESIDENTE/A DEL TRIBUNAL



ROBERTO IVAN
BASURTO QUILLIGANA

MBA. BASURTO QUILLIGANA ROBERTO
IVAN
VOCAL



JORGE FABRICIO
GUEVARA VIEJO

Ph.D. GUEVARA VIEJO JORGE FABRICIO
SECRETARIO/A DEL TRIBUNAL

DECLARACIÓN DE AUTORÍA DE LA INVESTIGACIÓN

Sr. Dr.

Fabricio Guevara Viejó

Rector de la Universidad Estatal de Milagro

Presente.

Yo, **Jonathan Arturo Ortiz Pérez** en calidad de autor y titular de los derechos morales y patrimoniales de este informe de investigación, mediante el presente documento, libre y voluntariamente cedo los derechos de Autor de esta investigación, que fue realizada como requisito previo para la obtención de mi Grado, de **Magíster en Matemática, Mención Modelación Matemática**, como aporte a la Línea de Investigación **Sociedad de la Información: Gestión, Medios y Tecnología**, de conformidad con el Art. 114 del Código Orgánico de la Economía Social de los Conocimientos, Creatividad e Innovación, concedo a favor de la Universidad Estatal de Milagro una licencia gratuita, intransferible y no exclusiva para el uso no comercial de la obra, con fines estrictamente académicos. Conservo a mi favor todos los derechos de autor sobre la obra, establecidos en la normativa citada.

Así mismo, autorizo a la Universidad Estatal de Milagro para que realice la digitalización y publicación de este Proyecto de Investigación en el repositorio virtual, de conformidad a lo dispuesto en el Art. 144 de la Ley Orgánica de Educación Superior.

El autor declara que la obra objeto de la presente autorización es original en su forma de expresión y no infringe el derecho de autor de terceros, asumiendo la responsabilidad por cualquier reclamación que pudiera presentarse por esta causa y liberando a la Universidad de toda responsabilidad.

Milagro, 9 de agosto del 2023

Ortiz Pérez Jonathan Arturo

C.I: 0926475609

CESIÓN DE DERECHOS DE AUTOR

Sr. Dr.

Fabricio Guevara Viejó

Rector de la Universidad Estatal de Milagro

Presente.

Mediante el presente documento, libre y voluntariamente procedo a hacer entrega de la Cesión de Derecho de Autor del Trabajo realizado como requisito previo a la obtención de mi Título de Cuarto Nivel, cuyo tema fue MÉTODO PARA LA RECONSTRUCCIÓN DEL GRIN EN CRISTALINOS y que corresponde al Vicerrectorado de Investigación y Posgrado.

Milagro, 9 de agosto del 2023.

Ortiz Pérez Jonathan Arturo

C.I: 0926475609

DEDICATORIA

Dedico mi tesis a mi familia en especial a mi mujer, amiga y compañera de vida Carmen Zavala que siempre me apoya y respalda mi superación académica. También, se lo dedico a mi hijo Josué de un año de edad, el cual ha sido un pilar fundamental, emocional y de inspiración para superarme y cumplir con este objetivo.

AGRADECIMIENTO

Primero agradezco a Dios por haber permitido encontrarme en este momento tan importante de mi vida y por brindarme la oportunidad de lograr cada objetivo y meta que me he propuesto, por darme salud, vida y en especial haberme dado a mi familia, pilar fundamental de mis logros.

Agradezco de gran manera a mi director de tesis Dr. Valenzuela Cobos Juan Diego, quien me acompañó en este proceso de tutorías.

Finalmente, agradezco a la Universidad Estatal de Milagro y a su cuerpo docentes que aportaron con sus conocimientos y experiencias compartidas en cada módulo de la maestría.

ÍNDICE GENERAL

ACEPTACIÓN DEL TUTOR	ii
CERTIFICACIÓN DE LA DEFENSA	iii
DECLARACIÓN DE AUTORÍA DE LA INVESTIGACIÓN.....	iv
CESIÓN DE DERECHOS DE AUTOR.....	v
DEDICATORIA	vi
AGRADECIMIENTO	vii
RESUMEN	xii
INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO I.....	6
CONTEXTUALIZACIÓN DEL PROBLEMA.....	6
1.1 Planteamiento del problema.....	6
1.2 Delimitación del problema	8
1.3 Formulación del problema	11
1.4 Preguntas de Investigación.....	11
1.5 Objetivos	11
1.5.1 Objetivo general	11
1.5.2 Objetivos Específicos	11
1.6 Justificación	12
CAPÍTULO II.....	13
MARCO TEORICO DE LA INVESTIGACIÓN.....	13
2.1 Modelo Matemático.....	13
2.2 Anatomía y funcionamiento del ojo humano	14
2.3 El cristalino como una lente GRIN	17
2.4 Cálculo de la trayectoria de la luz a través del cristalino	20
2.4.1 Método de las capas.....	21
2.4.2 Resolución numérica de la ecuación de los rayos.....	22
2.4.3 Aplicación del principio de Fermat	22
2.4.4 Reconstrucción del GRIN en cristalinos	24
CAPÍTULO III.....	26
MARCO METODOLÓGICO DE LA INVESTIGACIÓN	26
3.1 Diseño de la investigación	26
3.2 Tipo de métodos de investigación.....	26
3.3 Determinación de los expertos.....	27
3.4 Valoración de los expertos	32
CAPITULO IV.....	35
MATERIALES Y MÉTODOS.....	35

4.1 Planteamiento del problema	35
4.2 Cálculo de la trayectoria de la luz a través del cristalino	37
4.2.1 El método de Runge-Kutta de orden cuatro RK4	38
4.2.2 El método de Runge-Kutta con paso adaptativo RK45	41
4.2.3 Problema de Cauchy para la ecuación derivada del principio de Fermat	45
4.2.4 Problema de Cauchy para la ecuación del rayo	46
4.2.5 Aplicación de la ley de Snell en la superficie del cristalino	47
4.2.6 Cálculo del punto de salida del rayo	50
4.3 El modelo de GRIN bipolarabólico	53
4.4 El experimento	55
4.4.1 Obtención del punto y dirección de salida del rayo a partir de la imagen	56
4.5 Lenguajes de programación y bibliotecas de funciones	57
CAPÍTULO V	58
EXPERIMENTACIÓN Y RESULTADOS	58
5.1 Comparación de los métodos para el cálculo de la trayectoria de la luz	58
5.2 Sensibilidad de la función de mérito a los parámetros del GRIN	62
5.3 Evaluación del método para la reconstrucción del GRIN	64
5.3.1 Exactitud en la reconstrucción del GRIN	66
5.3.2 Influencia del número de trazos en la reconstrucción del GRIN	69
CONCLUSIONES	71
RECOMENDACIONES	72
BIBLIOGRAFÍA	73
ANEXO A	78
ANEXO B	79
ANEXO C	80
ANEXO D	81
ANEXO E	82
ANEXO F	84
ANEXO G	85

INDICE DE FIGURAS

Figura 2.1 Estructura del ojo humano.....	15
Figura 2.2 Foto de un cristalino humano	18
Figura 2.3 Representación esquemática de método de las capas	21
Figura 3.1: Representación de la recta de puntos de corte.....	33
Figura 4.1 Representación del trazado de rayos en el cristalino	36
Figura 4.2: Rayo de luz entrando al cristalino.	46
Figura 4.3: Representación esquemática de la refracción de la luz.	48
Figura 4.4 Posibles combinaciones de los versores v_1 , v_2 y n en la refracción	48
Figura 4.5: Plano imaginario que divide el cristalino en el modelo bipolarabólico.....	53
Figura 4.6: Experimento para el trazado de rayos.....	55
Figura 5.1 Error absoluto contra número de evaluaciones en el cálculo del punto de salida wf	61
Figura 5.2 Error absoluto contra número de evaluaciones en el cálculo de la pendiente de salida mf	61
Figura 5.3 Error absoluto contra tiempo de ejecución en el cálculo del punto de salida wf (superior) y la pendiente de salida mf (inferior).....	62
Figura 5.4: Variación de la función de mérito $G(c_1; c_2; \dots; c_m)$ con respecto a los parámetros del GRIN.	64
Figura 5.5 Error en la reconstrucción del GRIN.....	67
Figura 5.6 Distribución espacial del error en la reconstrucción del GRIN.....	68
Figura 5.7 Modelo óptico del ojo.....	69
Figura 5.8 Error en el cálculo de Z_{final}	69
Figura 5.9 Influencia del número de trazos en la reconstrucción del GRIN.....	70

INDICE DE TABLAS

Tabla 3.1 Resumen del Coeficiente de conocimiento K_c	29
Tabla 3.2.....	30
Resumen del Coeficiente de argumentación K_a	30
Tabla 3.2 Resumen del Coeficiente de argumentación K_a	30
Tabla 4.1	38
Combinación entre ecuación a resolver y el método numérico empleado	38
Tabla 4.2.....	39
Arreglo de Butcher para los métodos de Runge-Kutta.....	39
Tabla 4.3:.....	40
Arreglo de Butcher para el método de Runge-Kutta explícito de cuarto orden	40
Tabla 4.4.....	43
Arreglo de Butcher para el método RK4	43
Tabla 4.5.....	52
Coefficientes d_i usados en las fórmulas.....	52
Tabla 5.1 Parámetros del GRIN	59
Tabla 5.2 Parámetros de la superficie del cristalino	60
Tabla 5.3.....	66
Restricciones de caja para los parámetros del GRIN parámetros del GRIN	66

RESUMEN

En este trabajo se presenta un método para la obtención de los parámetros que caracterizan la distribución de índices de refracción (GRIN) en cristalinos humanos, a partir de mediciones de la trayectoria de un rayo de luz antes y después de atravesar el cristalino. Estas mediciones pueden ser obtenidas de un experimento sencillo. Se plantea formalmente el problema a resolver como un problema de optimización, se describen sus particularidades y se desarrollan las fórmulas que se usan en la implementación del método. Se compararon varias vías para realizar el cálculo eficiente de la trayectoria de la luz a través del cristalino, obteniéndose que el uso del esquema de paso adaptativo Runge-Kutta-45 para la resolución de la ecuación diferencial que surge del principio de Fermat, es la vía más eficiente. Para resolver el problema de optimización se usaron los algoritmos de búsqueda local SIMPLEX (Nelder-Mead) y quasi-Newton (BFGS: Broyden-Fletcher-Goldfarb- Shanno) combinados con el de búsqueda global BASIN-HOPPING. Para evaluar el método se usó como caso de estudio un modelo de GRIN bipolarabólico y se simuló mediciones con distintos niveles de error. También se analizó la influencia del número de mediciones a tener en cuenta. Para errores en las mediciones (puntos y pendiente de salida del rayo en la superficie posterior del cristalino) con desviación estándar menor que 10^{-3} se obtuvieron errores en la reconstrucción del GRIN menores que 10^{-2} . A partir de 60, el número de mediciones a tener en cuenta no influyó notablemente en la reconstrucción del GRIN.

Palabras Claves: Grin, cristalinos, métodos de reconstrucción.

ABSTRACT

This paper presents a method for obtaining the parameters that characterize the distribution of refractive indices (GRIN) in human lenses, from measurements of the path of a light ray before and after passing through the lens. These measurements can be obtained from a simple experiment. The problem to be solved is formally stated as an optimization problem, its particularities are described and the formulas used in the implementation of the method are developed. Several ways to perform the efficient calculation of the path of light through the crystalline lens were compared, obtaining that the use of the Runge-Kutta-45 adaptive step scheme for the resolution of the differential equation that arises from Fermat's principle, is the more efficient way. To solve the optimization problem, the local search algorithms SIMPLEX (Nelder-Mead) and quasi-Newton (BFGS: Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) were used combined with the global search algorithm BASIN-HOPPING. To evaluate the method, a biparabolic GRIN model was used as a case study and measurements with different levels of error were simulated. The influence of the number of measurements to be taken into account was also analyzed. For errors in the measurements (points and slope of the beam output on the posterior surface of the crystalline lens) with a standard deviation of less than 10^{-3} , errors in the GRIN reconstruction of less than 10^{-2} were obtained. After 60, the number of measurements to be taken into account did not significantly influence the reconstruction of the GRIN.

Keywords: Grin, crystalline, methods of reconstruction.

INTRODUCCIÓN

En cuanto a la función visual del ser humano aporta más del 85% de la información obtenida por los órganos de los sentidos, es parte fundamental en la fisiología de los seres humanos; es un proceso de información muy complejo que se emplea para interpretar lo que se observa a través de los ojos, para equilibrarse con la gravedad, para conducir las manos, pies, y cuerpo en general, relacionarlos con el entorno y orientarse en el espacio (Graue Wiechers, 2014).

Según el Informe Mundial sobre la visión presentado en el 2020, por el director general de la Organización Mundial de la Salud (OMS), el Dr. Tedros Adhanom Ghebreyesus, más de mil millones de personas en todo el mundo viven con deficiencia visual porque no reciben la atención que se necesita para afecciones como la miopía, la hipermetropía, el glaucoma y las cataratas (Organización Mundial de la Salud, 2020).

De manera que el informe, puso de manifiesto que el envejecimiento de la población, los cambios en los estilos de vida y el acceso limitado a la atención oftalmológica, en particular en los países de ingresos bajos y medios, son algunos de los principales factores que impulsan el aumento del número de personas con deficiencia visual.

Las regiones de ingresos bajos y medios del África Subsahariana Occidental y Oriental y de Asia Meridional tienen tasas de ceguera ocho veces superiores a las de todos los países de ingresos altos.

En el año 2002 se calculó que alrededor de 180 millones de personas en el mundo sufrían algún tipo de discapacidad visual, de los cuales, una cuarta parte eran ciegos. Además, se estimó que para el 2020 este número se duplicaría llegando así, a una situación crítica humana (Organización Mundial de la Salud, 2020).

De acuerdo a estudios estadísticos, el 80% de los casos de ceguera son evitables. El 20% de estos, porque derivan de enfermedades que se pueden prevenir y el 60% restante porque son casos tratables con buen pronóstico.

Para la Organización Mundial de la Salud (2020): “La salud es un estado de completo bienestar físico, mental y social y no solamente la ausencia de afecciones o enfermedades”, definición que encierra la consideración del derecho humano a la salud como de gran alcance determinante de la vida misma.

Por consiguiente, en la Constitución de la República de Ecuador dispone en su artículo 32 que: la salud es un derecho que garantiza el Estado, cuya realización se vincula al ejercicio de otros derechos, entre ellos el derecho al agua, la alimentación, la educación, la cultura física, el trabajo, la seguridad social, los ambientes sanos y otros que sustentan el buen vivir (Constitución de la República del Ecuador, 2008).

En realidad, Ecuador al estar ubicado en la línea ecuatorial, el país posee un alto riesgo de contraer diversas enfermedades visuales, ya que la luz solar como la resequedad afecta notablemente a la vista.

Uno de los principales problemas es la radiación ultravioleta, que se refiere a la degeneración macular relacionada con la edad. La mácula es la parte central de la retina, donde se tiene la visión más exacta. Es la que se utiliza, por ejemplo, para leer, según estudios el 30% de las personas mayores de 65 años que viven en Ecuador tiene problema de mácula, tres veces más que en un país europeo. Aunque los síntomas no se manifiestan de forma inmediata, se presentan algunos puntos ciegos en la vista, visión borrosa y dificultad para distinguir líneas, letras y rostros.

Otro agente importante que afecta es el clima ecuatoriano es extremadamente seco, sobre todo en la Sierra, donde el 50% de la capa lagrimal se evapora. Esto hace que las personas sean más propensas a tener queratocono. Se trata de

una enfermedad degenerativa donde la córnea que normalmente es redonda, se vuelve más fina y desarrolla una protuberancia en forma de cono.

Existen investigaciones relacionadas con enfermedades visuales como: Déficit visual y nivel de educación realizado, se investigó si existe una relación entre el nivel educativo de la población en estudio y el déficit visual de la misma (Castro et al., 2010).

El trabajo Prevalencia y factores de riesgo de errores refractivos sub corregidos entre adultos, concluyó que los errores refractivos no corregidos estaban asociados a un bajo nivel educativo (Argento, 2008).

Asimismo, en los trabajos Prevalencia de ceguera y baja visión en una población italiana: una comparación con otros estudios europeos, de Cedrone y colaboradores (Jones, Atchison, Meder, & Pope, 2005).

Cambios anatómicos y patológicos basados en la tomografía óptica coherente en el tratamiento del edema macular diabético con láser ND: YAG Subumbral de doble frecuencia. Todos estos trabajos mencionados conforman los antecedentes de esta investigación (Jones & Pope, 2004).

Actualmente se realizan trabajos encaminados al desarrollo de un modelo biofísico del ojo humano. Dicho modelo tiene como objetivo ser un medio de aprendizaje para futuros practicantes de la oftalmología, así como servir para estudiar los efectos causados por procedimientos quirúrgicos, en particular la cirugía refractiva y la implantación de lentes intraoculares.

De hecho, un modelo constituye una representación o abstracción de la realidad. Entre los diferentes tipos de modelos se pueden mencionar los analógicos, físicos, gráficos, esquemáticos y matemáticos.

Consideramos que la modelación matemática es un intento de describir alguna parte del mundo real en términos matemáticos. Modelos matemáticos han sido

construidos en todas las ciencias tanto físicas, como biológicas y sociales. Los elementos que lo componen son tomados del cálculo, el álgebra, la geometría y otros campos afines.

Es natural que los modelos matemáticos sean modelos de analogía incompleta, es decir, que reflejan solamente algunas propiedades del objeto modelado. A la vez, los modelos matemáticos se caracterizan por una suficiente generalidad, describiendo una clase completa de objetos o fenómenos.

Por otra parte, la creación de modelos matemáticos no requiere significativos gastos materiales y la realización del propio proceso de modelación con ayuda de los modernos medios de cómputo permite efectuarla en un tiempo relativamente pequeño.

El autor de esta investigación considera que un modelo matemático se establece un conjunto de relaciones (de igualdad y/o de desigualdad) definidas en un conjunto de variables que reflejan la esencia de los fenómenos en el objeto de estudio. Formalmente un modelo matemático M es una estructura, donde R es el conjunto de las relaciones y V el conjunto de las variables.

En esta investigación se pretende contribuir al desarrollo del modelo biofísico del ojo humano, concretamente con la implementación de un método para la obtención de los parámetros que caracterizan la distribución del índice de refracción en el cristalino de los humanos, que tiene una estructura GRIN (GradientIndex), a partir de mediciones experimentales del trayecto de un rayo de luz (Gullstrand, 1924).

De hecho, el cristalino se desarrolla a partir de la vesícula del cristalino, este es un derivado del ectodermo superficial. La pared anterior de esta vesícula se convierte en el epitelio del cristalino. Los núcleos de las células que forman la pared posterior de la vesícula del cristalino se disuelven, luego se alargan considerablemente para formar células epiteliales muy transparentes, éstas son las fibras primarias del cristalino.

A medida que estas fibras crecen de manera gradual se van cerrando la cavidad de las vesículas del cristalino. El borde del cristalino es conocido como zona o región ecuatorial, ya que se localiza en el medio del cristalino.

El autor de la tesis considera que la comprensión de los procesos fisiológicos y físicos que se suscitan para que este fenómeno se dé resulta primordial para el entendimiento de la patología, su afectación a la calidad de vida de la persona, y el porqué de su manejo.

CAPÍTULO I

CONTEXTUALIZACIÓN DEL PROBLEMA

Uno de los problemas de salud más frecuentes a nivel mundial son los relacionados con la visión. Estos van desde la simple pérdida de agudeza visual, corregible con espejuelos graduados, hasta padecimientos que son tratados quirúrgicamente.

1.1 Planteamiento del problema

Para comprender plenamente el problema es necesario tener algún conocimiento de la anatomía y fisiología del ojo, con relación a la estructura y función del ojo.

El globo ocular que por su forma es denominado así o más común llamado ojo tiene forma casi esférica y un diámetro de 2,5 centímetros, que está compuesto por tres capas (Riordan-Eva & Whitcher, 2009):

- Esclerótica o capa exterior;
- Coroides o capa media;
- Retina o capa interna

La capa exterior o esclerótica es blanca y opalescente, excepto en su parte central, que es transparente y se llama córnea. La luz es transmitida al ojo por medio de la córnea (Benjamin, 1980).

La capa media o coroides contiene los vasos sanguíneos del ojo, justo detrás de la córnea, el coroides se vuelve visible y se llama iris, teniendo la pupila en el centro. Directamente detrás del iris está la lente cristalina, que capta la luz cuando pasa por la pupila y la enfoca en la retina. Alrededor del cristalino, el coroides se forma en unos pliegues conocidos como procesos ciliares, que contienen en su interior al músculo ciliar. Este músculo está conectado con el cristalino por medio de un pequeño ligamento, de modo que la acción del músculo ciliar puede controlar la contracción y expansión del cristalino (Benjamin, 1980).

La capa interna o retina, es en realidad una continuación del nervio óptico (que está situado en la parte posterior del ojo); es extremadamente delgada y delicada, y por ella entran las imágenes de los objetos externos en el campo de visión (Benjamin, 1980).

Teniendo en cuenta esto, es fácil seguir el proceso real de la vista, que es el siguiente: los rayos de luz pasan por la córnea, los rayos externos son detenidos por la pupila, y sólo los rayos centrales restantes entran realmente en el ojo. Estos pasan por el cristalino, que al ser de forma convexa los hace converger en la retina, produciéndose como resultado una imagen invertida. La imagen es transmitida por el nervio óptico hasta el cerebro, y así se produce la visión (Benjamin, 1980).

De acuerdo a las estadísticas de la OMS, 2020 se estima que más de 161 millones de personas estaban visualmente discapacitados en el año 2004 y más de 37 millones estaban ciegos. El 82% tenían más de 50 años y el 90% vivía en áreas desarrolladas del planeta (Organización Mundial de la Salud, 2020).

La OMS, 2020 menciona cinco razones principales para la ceguera: catarata, tracoma, oncocercosis, ceguera congénita y errores refractivos. La distribución geográfica de las alteraciones visuales es compleja y sus etiologías varían de un lugar a otro, por ejemplo, algunos estudios han demostrado que la mayoría de las causas comunes de discapacidades visuales y ceguera ocurridas en la India y en algunos otros países desarrollados son la Retinosis Pigmentaria y Anormalidades del Nervio óptico y de ellos el 64% se deben a anormalidades congénitas o genéticas (Organización Mundial de la Salud, 2020).

En la región Sierra Centro del Ecuador, en la Provincia de Chimborazo se determinó que la emanación constante de ceniza volcánica, del volcán Tungurahua, que influye en la irritación conjuntival y en la composición de la película lagrimal, esto se lo podría vincular como factor de riesgo.

El autor de esta investigación considera que la baja visión y el déficit visual son considerados problemas que afectan la salud pública en todo el mundo. Esta condición tiene impactos sociales y económicos severos no solo en los individuos y sus familias sino en toda la sociedad.

En realidad, hemos encontrado pocas referencias de estudios realizados que tengan como objetivo determinar modelo biofísico del ojo humano, concretamente con la implementación de un método para la obtención de los parámetros, razón por la cual este estudio es de gran importancia para transpolar hacia la atención oftalmológica a nivel nacional.

1.2 Delimitación del problema

Diversos estudios poblacionales muestran que la pérdida de la visión es la discapacidad más temida de alta connotación social. El sentido de la visión es inherente a todas las actividades del ser humano, este órgano receptor llamado globo ocular transmite por medio de señales eléctricas al cerebro información de la forma, color y tamaño de las cosas que nos rodean, por medio de este sentido se permite el desarrollo del hombre en la sociedad y por supuesto interviene en la relación e interacción en el rol laboral.

En Ecuador una de las causas de incapacidad permanente está relacionada con lesiones oculares, así lo confirma Organización Mundial de la Salud (2020), que corresponde a un 13,8% del total de las discapacidades en el país; además, según la clasificación de dificultades permanentes el 28% están relacionadas con la visión, como dificultades para la distinción de luz, objetos y personas.

De hecho, el 95% de las personas de más de 65 años presentan un enturbiamiento notable del cristalino, aunque no son raras las excepciones individuales (Curbelo Cunill, 2007). El progresivo envejecimiento de la población ha aumentado su prevalencia y actualmente el único tratamiento eficaz y reparador es la cirugía (Boyd, 2010).

De manera que toma importancia entonces el hecho de que al menos en nuestra localidad, no se encuentra bien estudiada esta patología, debido a la escasez de

trabajos en torno a este problema. Por lo tanto, al ser una enfermedad que se asocia a múltiples factores de riesgo, la mayoría comunes a la población, con esta investigación se pretende fundamentar el conocimiento sobre los dichos factores presentes en los pacientes con este problema.

Espacio: Este estudio se realizó en la región Sierra Centro del Ecuador, en la Provincia de Chimborazo.

Tiempo: La información obtenida está dentro del rango previsto de valides de una investigación científica, de 3 años.

Universo: El estudio se basará en la propuesta de un modelo biofísico del ojo humano, el mismo tiene como objetivo ser un medio de aprendizaje para futuros practicantes de la oftalmología, así como servir para estudiar los efectos causados por procedimientos quirúrgicos, en particular la cirugía refractiva y la implantación de lentes intraoculares.

Ante la problemática descrita surge la necesidad del modelo biofísico, con la implementación de un método para la obtención de los parámetros que caracterizan la distribución del índice de refracción en el cristalino de los humanos.

La importancia de contar con dicho método se justifica por dos aspectos principales. El primero está relacionado con el hecho de que el cristalino humano presenta un GRIN que varían con la edad y la acomodación, así que para incorporar esta información en el modelo del ojo es necesario hacer mediciones de la distribución del índice de refracción en cristalinos reales (Jones, Atchinson, & Pope, 2007).

El segundo aspecto viene dado porque la tecnología de Imágenes de Resonancia Magnética (IRM), que ha dado buenos resultados en la estimación del índice de refracción y que además permite mediciones *in vivo*, tiene el inconveniente de su elevado costo y en cierta medida su poca disponibilidad en el país (Jones, Atchinson, & Pope, 2007; Garner, Smith, Yao, & Augusteyn, 2001; Kasthurirangan, Markwell, Atchison, & Pope, 2008).

Según Huggert (1948), las mediciones directas usando refractómetros de Abbe, a lo que también hace referencia Weale (1963); poseen una gran incertidumbre por la inevitable destrucción de la estructura del cristalino en el proceso. Esto solo nos deja los métodos de optimización basados en la trayectoria del rayo de luz (De Castro, et al., 2010; De Castro, et al., 2013; Garner, Smith, Yao, & Augusteyn., 2001)

Estos métodos de optimización se basan en asumir una expresión matemática para el GRIN dependiente de ciertos parámetros, y un conjunto de mediciones de la trayectoria de rayos de luz antes y después de atravesar el cristalino. La idea es encontrar los valores de los parámetros del GRIN que mejor reproduzcan el paso de la luz, minimizando las diferencias entre la trayectoria calculada y las mediciones.

Un punto vital de estos métodos es el cálculo preciso y eficiente de la trayectoria de la luz en un medio de GRIN. Establecer la forma de hacer dicho cálculo para el caso concreto del cristalino humano.

Además de ser una parte esencial de este trabajo, es un resultado muy importante que será incorporado a un programa informático que se encuentra en desarrollo. Este programa será usado en la planificación de cirugías de implantación de lentes intraoculares.

Una característica atractiva del método descrito en esta investigación, es poder obtener los datos del trayecto de la luz antes y después del cristalino a partir de un montaje experimental sencillo, como por ejemplo el descrito en Jones, Atchison, Meder y Pope (2005).

Sin embargo, para este trabajo dichos datos serán simulados con el fin de evaluar el método y así obtener conclusiones que sean útiles cuando se realicen experimentos reales. Téngase en cuenta, que de contar con cristalinos reales es necesario hacer un uso óptimo de ellos, por la obvia dificultad que supone conseguirlos.

1.3 Formulación del problema

Teniendo en cuenta el estudio realizado en esta área del conocimiento, se asume como **Problema científico**:

¿Cómo contribuir a través de un modelo biofísico que permita identificar los factores que inciden para obtener un método para la reconstrucción del GRIN en cristalininos humanos?

1.4 Preguntas de Investigación.

1. ¿Qué características epistemológicas y bibliográficas se conoce acerca del estado del arte sobre modelo biofísico?
2. ¿Mediante el análisis de los componentes del modelo biofísico se podrá identificar los factores que inciden para obtener un método para la reconstrucción del GRIN en cristalininos humanos?
3. Al analizar los componentes del modelo biofísico, ¿Será posible el estudio de métodos para el cálculo del trayecto de la luz en medios GRIN y en particular en el cristalino?

1.5 Objetivos

1.5.1 Objetivo general

Obtener un método para la reconstrucción del GRIN en cristalininos humanos a partir de mediciones experimentales del trayecto de la luz.

1.5.2 Objetivos Específicos

1. Revisar la literatura sobre el uso de métodos para la reconstrucción del GRIN en cristalininos, especialmente los basados en el trazado de rayos de luz.
2. Realizar el estudio de métodos para el cálculo del trayecto de la luz en medios GRIN y en particular en el cristalino. Comparar distintas formas de realizar dicho cálculo, con el fin de obtener la más eficiente computacionalmente.
3. Plantear el problema del ajuste del modelo GRIN a los datos experimentales como un problema de optimización, de tal manera que los datos de entrada puedan ser obtenidos de un experimento sencillo.

4. Realizar experimentos numéricos para el caso específico del GRIN biperabólico que es usado en el modelo del ojo, con el fin de evaluar el método obtenido (Benjamin, 1980).

1.6 Justificación

La baja visión y el déficit visual son considerados problemas que afectan la salud pública en todo el mundo. Esta condición tiene impactos sociales y económicos severos no solo en los individuos y sus familias sino en toda la sociedad.

Las causas que provocan discapacidad visual son muchas y muy variadas: pueden ser heredadas (como la retinosis pigmentaria), adquiridas (infecciones oculares mal tratadas), por accidente, por enfermedad (la diabetes es la causa número uno de ceguera en el mundo), por desnutrición, por drogadicción o alcoholismo, por descuido médico, etc.

Según Argento (2008), ser una persona caracterizada por la discapacidad visual trae diversas implicancias. Para valorarlas y comprenderlas es necesario considerar:

- El momento de su aparición: la discapacidad visual puede ser congénita o adquirida.
- El grado en que está comprometida la visión: la persona puede ser totalmente ciega, tener baja visión severa o baja visión leve.
- El contexto en que se desenvuelve: si se es querido y aceptado, se recibe estimulación, apoyo y oportunidades para ser incluido socialmente.

A propósito, los modelos matemáticos, se define como un procedimiento mediante el cual se trata de determinar si existe o no relación de dependencia entre dos o más variables. Es decir, conociendo los valores de una variable independiente, se trata de estimar los valores, de una o más variables dependientes. En nuestra investigación el modelo biofísico tiene como objetivo ser un medio de aprendizaje para futuros practicantes de la oftalmología, así como servir para estudiar los efectos causados por procedimientos quirúrgicos en particular la cirugía a refractiva y la implantación de lentes intraoculares.

CAPÍTULO II

MARCO TEORICO DE LA INVESTIGACIÓN

El presente capítulo es producto de varias fuentes: Revisión bibliográfica sobre el tema (textos, investigaciones, artículos), se hace un estudio sobre los modelos matemáticos usados para describir la variación del índice de refracción dentro del cristalino. Luego se exponen los principales métodos para el cálculo de la trayectoria de la luz y finalmente los resultados relacionados con la reconstrucción del GRIN encontrados en la literatura.

2.1 Modelo Matemático

Es importante señalar que un verdadero modelo matemático se define por las relaciones que combina entre sí. Estas relaciones son independientes de los datos que se quieran incluir en el modelo matemático, ya que, un modelo matemático se puede utilizar en diferentes circunstancias y en diferentes contextos (Aravena, Caamaño, & Giménez, 2008). Un modelo es, en definitiva, una herramienta de apoyo a la toma de decisiones; por esta razón, sus resultados deben ser inteligibles y útiles (Ramos, Sánchez, Ferrer, Barquín, & Linares, 2010).

La construcción de modelos matemáticos es una de las herramientas utilizadas para analizar y estudiar problemas de distintas áreas del conocimiento; el objetivo de los modelos matemáticos es poder describir, explicar y predecir fenómenos y procesos en diferentes campos del conocimiento (Montesinos-López & Hernández-Suárez, 2007).

Consideramos que un modelo es una representación matemática simplificada de una realidad compleja. Modelar es la acción de construir un modelo, de acuerdo con la realidad.

De hecho, en todo modelo matemático se puede determinar tres fases:

- Construcción del modelo. Transformación del objeto no-matemático en lenguaje matemático.
- Análisis del modelo. Estudio del modelo matemático.

- Interpretación del análisis matemático. Aplicación de los resultados del estudio matemático al objeto inicial no matemático.

El éxito o fracaso de los modelos matemáticos es un reflejo de la precisión con que dicho modelo matemático representa al objeto inicial y no de la exactitud con que las matemáticas analizan el modelo (Rodríguez-Velázquez & Steegmann-Pascual, 2013).

Para la realización de los modelos matemáticos se debe de trabajar en equipo multidisciplinario que aportan diferentes perspectivas y conocimiento en la representación de la realidad. Por lo tanto, un modelo se convierte en una herramienta de apoyo en la toma de decisiones (Ramos, Sánchez, Ferrer, Barquín, & Linares, 2010).

El autor considera que los modelos matemáticos, deben ser vistos como el vínculo entre la teoría matemática y el mundo habitual en que vivimos, de modo que se convierten en una alternativa para resolver problemas que la sociedad presenta, con un pensamiento crítico que propicie la toma de decisiones.

2.2 Anatomía y funcionamiento del ojo humano

El ojo humano es un sistema óptico complejo, formado por dos lentes encargadas de captar la luz y concentrarla en la retina (ver figura 2.1) donde es convertida en impulsos nerviosos que serán interpretados como imágenes en el cerebro.

Su forma es aproximadamente esférica, mide alrededor de 2.5 cm de diámetro y está lleno de un gel transparente llamado humor vítreo que rellena el espacio comprendido entre la retina y el cristalino. Los principales elementos de la figura 2.1 se describen a continuación:

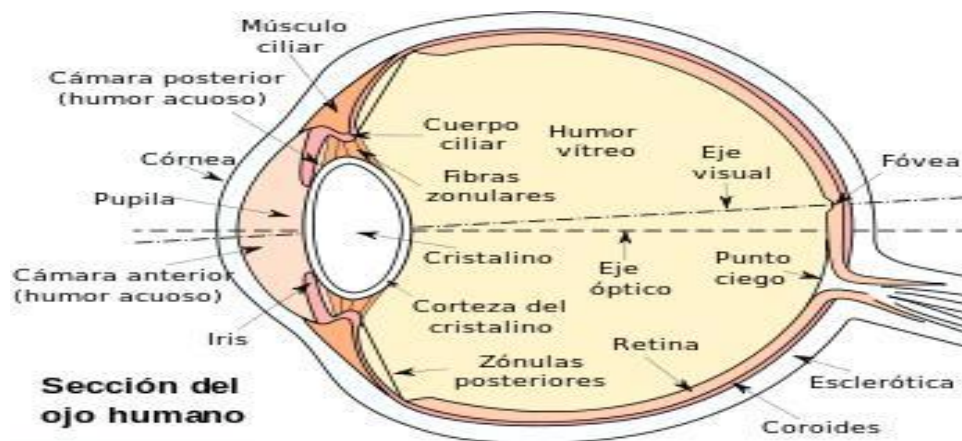
- **Cornea:** es la parte frontal transparente del ojo humano que cubre el iris, la pupila y la cámara anterior. Consiste en un menisco cóncavo con un grosor en la periferia de casi 1 mm y alrededor de 0.5 mm en el centro. La cara anterior tiene forma oval con un diámetro vertical de 11 mm y horizontal de 12 mm y un radio de curvatura de 7.8 mm. La cara posterior

medida vertical y horizontalmente 13 mm y su radio de curvatura es de 6.5 mm. Su función principal es refractar la luz.

Es responsable de dos tercios partes de la potencia óptica del ojo y su poder refractivo es aproximadamente de 43 dioptrías. Naturalmente, estos valores cambian ligeramente de persona a persona alrededor de los valores medios reportados.

Figura 2.1

Estructura del ojo humano



Fuente: Información tomada del libro: Quiroz G., Anatomía Humana, Editorial Porrúa, 2010)

- **Iris:** es la membrana coloreada y circular del ojo que separa la cámara anterior de la posterior. Posee una apertura central de tamaño variable que comunica las dos cámaras llamada pupila. Su función principal es controlar la cantidad de luz que penetra en el ojo disminuyendo (miosis) o aumentando (midriasis) el tamaño de la pupila.
- **Cámara anterior:** está limitada por delante por la córnea y por detrás por el iris y el cristalino. Se encuentra llena de un líquido llamado humor acuoso, el cual circula libremente y aporta los elementos necesarios para el metabolismo de estructuras como la córnea y el cristalino, que al ser avasculares no reciben aportes nutritivos de la sangre.

- **Cámara posterior:** es el espacio situado detrás del iris. Aquí se produce el humor acuoso en los llamados procesos ciliares.
- **Cristalino:** es una lente biconvexa que está situada tras el iris y delante del humor vítreo. Es transparente, incoloro, flexible y avascular. Aporta un tercio del poder óptico del ojo humano. Su papel fundamental es participar en el proceso de enfoque de objetos que están a distinta distancia del ojo, llamado acomodación. Mas adelante se describe con mayor detalle el cristalino.
- **Músculos ciliares:** es un musculo situado en el interior del ojo. Tiene forma de anillo y esta adherido al cristalino mediante unas fibras que se llaman ligamento suspensorio del cristalino. Su función principal es cambiar la curvatura y grosor del cristalino mediante su contracción o relajación para lograr el enfoque de objetos a diferentes distancias.
- **Humor vítreo:** líquido gelatinoso y transparente que rellena el espacio comprendido entre la superficie interna de la retina y la cara posterior del cristalino, es más denso que el humor acuoso. Mantiene la forma de globo ocular y la superficie de la retina uniforme para que la recepción de imágenes sea nítida. Ocupa cuatro quintas partes del volumen total del ojo y carece de vascularización. A diferencia del humor acuoso, el humor vítreo no se renueva.
- **Retina:** es un tejido sensible a la luz, situado en la superficie interior del ojo. La luz que incide en la retina desencadena una serie de fenómenos químicos y eléctricos que finalmente se traducen en impulsos nerviosos que son enviados hacia el cerebro por el nervio óptico. Su estructura es compleja y está formada básicamente por varias capas de neuronas interconectadas mediante sinapsis. Las únicas células sensibles directamente a la luz son los conos y los bastones. La retina humana contiene 6.5 millones de conos y 120 millones de bastones. Los bastones funcionan principalmente en condiciones de baja luminosidad y proporcionan la visión en blanco y negro. Los conos están adaptados a las situaciones de mucha luminosidad y proporcionan la visión en color.

A propósito, para que los rayos de luz que penetran en el ojo se puedan enfocar en la retina, se deben refractar. La cantidad de refracción requerida depende de la distancia a la que esté el objeto hacia el que se mira. La mayor parte de la refracción ocurre en la córnea, que tiene una curvatura fija.

La otra parte se da en el cristalino. Este puede cambiar de forma por la acción de los músculos ciliares, aumentando o disminuyendo así su capacidad de refracción, a este proceso se le conoce como acomodación. Para los objetos más cercanos se necesita mayor poder de refracción, así que los músculos ciliares presionan el cristalino aumentando su curvatura y grosor.

Por el contrario, si se enfoca un objeto lejano, los músculos ciliares se relajan disminuyendo la curvatura y grosor del cristalino. En particular, cuando se mira al infinito (en la práctica a una distancia muy lejana), el cristalino alcanza la menor curvatura posible y en este caso no existe acomodación.

2.3 El cristalino como una lente GRIN

Es el órgano de la acomodación, es una lente biconvexa situada detrás del iris, al nivel de los procesos ciliares. Es la segunda superficie refractiva en importancia, después de la córnea. Incoloro y transparente al principio, va tomando poco a poco una coloración ambarina. Su índice de refracción aumenta con la edad.

El propósito principal del cristalino consiste en enfocar objetos a diferentes distancias. Esto lo hace variando su curvatura y espesor mediante el proceso de acomodación. Según Argento (2008), es bien conocido que el cristalino humano muestra una distribución no homogénea de índices de refracción, por lo que son considerados lentes GRIN. Esta característica viene dada por la desigual distribución de proteínas (mayormente cristalina) presentes en su interior (Jones, Atchinson, & Pope, 2007).

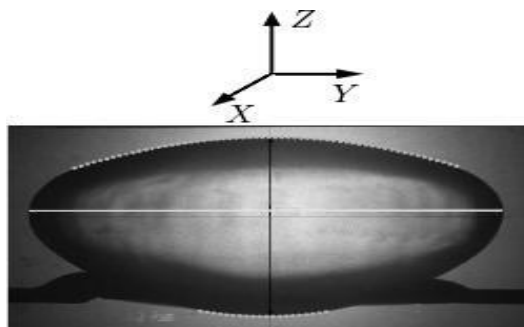
Ser una lente GRIN le otorga su capacidad para refractar la luz con mayor potencia que una lente convencional de sus mismas dimensiones y que tuviera

un índice de refracción mayor que el máximo valor en su interior, que lo convierte en una pieza clave en el proceso de visión. En la figura 2.2 se muestra la foto de un cristalino humano sobre un pedestal.

Como se observa en la figura 2.2 el cristalino es una lente biconvexa. La curvatura de la cara anterior (la que limita con el humor acuoso, situada en la parte superior en la figura 2.2) es inferior a la de la cara posterior. Estas caras con frecuencia son descritas matemáticamente por superficies esféricas (Koretz, Cook, & Kaufman, 2001; Brown, 1974).

Figura 2.2

Foto de un cristalino humano.



$$r^2 + (Q+1) Z^2 - 2Rz = 0, \quad (1.1)$$

Donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ representa la distancia radial al eje Z (línea blanca) y la coordenada z la distancia axial.

Q y R son la esfericidad y el radio de curvatura respectivamente. Con ecuaciones del tipo (1.1) no se describe completamente la forma del cristalino, sin embargo, sí se describe con buena exactitud la forma de las caras dentro de un radio lo suficientemente grande como para abarcar la región que tiene mayor importancia en el modelado óptico del ojo. Otras descripciones más precisas de la forma del cristalino también son posibles (Smith, Atchison, Iskander, Jones, & Pope, 2009), aunque para los objetivos de este trabajo no son necesarias.

En cuanto a la distribución de índices de refracción dentro del cristalino, existen varios modelos propuestos. La primera descripción del GRIN en cristalinos como una función continua, se debe a Gullstrand (1924). Esta fue mejorada por Blaker (1980), y también por Smith, Pierscionek y Atchison (1991), quienes propusieron el uso de polinomios de mayor orden para describir mejor los datos

experimentales. La variedad de funciones usadas abarca funciones exponenciales (Manns, Ho, Borja, & Parel, 2010; Smith, Atchison, & Pierscionek, 1992), parabólicas (Liou & Brennan, 1997) u otros polinomios (Díaz, Pizarro, & Arasa, 2008; Rama, Pérez, Bao, Flores Arias, & Reino, 2005) para describir la disminución del índice de refracción del núcleo hasta la superficie del cristalino. El modelo de GRIN usado en este trabajo es del tipo parabólico (Liou & Brennan, 1997) y consiste en dos funciones cuadráticas de la forma:

$$f(z; r) = n_{00} + n_{01}z + n_{02}z^2 + n_{12}r^2, \quad (1.2)$$

donde n_{00} ; n_{01} ; n_{02} y n_{12} son constantes.

En este caso el cristalino es dividido por un plano imaginario en dos partes: anterior y posterior. El índice de refracción queda definido como:

$$n(z; r) = \begin{cases} n_A(z, r) \text{ parte anterior} \\ n_P(z, r) \text{ parte posterior} \end{cases} \quad (1.3)$$

donde $n(z; r)$ es continua hasta la primera derivada sobre el plano que divide ambas partes. Aquí $n_A(z; r)$ y $n_P(z; r)$ son funciones del tipo (1.2)

El modelo biparabólico ha demostrado representar bastante bien el GRIN en cristalinos de humanos jóvenes donde el índice de refracción varía aproximadamente de manera cuadrática (Jones, Atchison, Meder, & Pope, 2005). Más adelante se detallará acerca de este modelo, por ser el que se usará como caso de estudio en este trabajo.

Otro modelo frecuentemente usado es el modelo de tres parámetros (Manns, Ho, Borja, & Parel, 2010), que describe el GRIN en coordenadas polares. El centro de coordenadas se ubica en el núcleo del cristalino. Este modelo se puede representar matemáticamente mediante la siguiente expresión:

$$n(\rho, \theta) = (n_N - n_S) \left(\frac{\rho}{\hat{\rho}(\theta, s)} \right)^p, \quad (1.4)$$

Aquí n_N y n_S son los índices de refracción en el núcleo y la superficie del cristalino respectivamente y ρ es un parámetro que en general depende de la edad de la persona. El término $\hat{\rho}(\theta, s)$ es la distancia desde el núcleo hasta la superficie en la dirección de θ .

El modelo (1.4) ha sido ampliamente usado para describir el GRIN en cristalinos y representa con buena exactitud los cambios en el GRIN debido a la edad (De Castro, et al., 2011).

Contar con un modelo matemático para describir el GRIN es esencial para calcular la trayectoria de un rayo de luz a través del cristalino. En la próxima sección se mencionan los principales métodos para calcular dicha trayectoria.

2.4 Cálculo de la trayectoria de la luz a través del cristalino

El cálculo del paso de la luz a través de un medio GRIN tiene amplias aplicaciones sobre todo en el diseño y construcción de dispositivos ópticos. Aunque se realizan muchos esfuerzos para encontrar soluciones analíticas que describan la trayectoria de la luz a través de un medio GRIN, solo en algunos casos particulares se han encontrado (Marchand, 1978). Para un medio de GRIN arbitrario, la vía más usada es calcular el trayecto de la luz a través de métodos numéricos.

La mayoría de los métodos se basan en resolver numéricamente la ecuación de los rayos (Born & Wolf, 1999). Según los autores Sharma, Kumar y Ghatak (1982), usan el método de Runge-Kutta de orden cuatro para resolver dicha ecuación después de introducir un cambio de variable que la simplifica. Basándose en la misma ecuación, Puchalski (1992), emplea un método predictor-corrector con control adaptativo del paso.

El control adaptativo del paso también es propuesto en Nishidate, Nagata, Morita y Yamagata (2011), a través de un esquema Runge-Kutta-Fehlberg (Fehlberg, 1969). Para el caso concreto de cristalinos humanos se usa frecuentemente el método de capas, que considera pequeñas franjas de refractividad constante (Atchison & Smith, 1995).

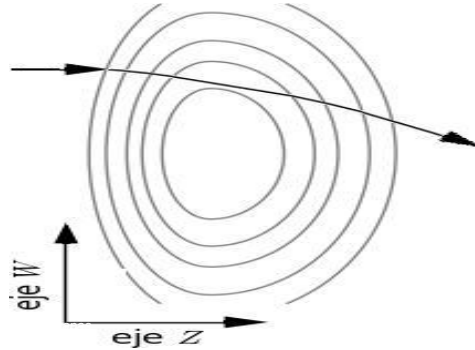
Un punto importante a la hora de calcular el paso de la luz a través de una lente GRIN es obtener el intercepto con la superficie de salida. Donde se propone el uso de interpolación (Sharma & Ghatak, 1986; Stone & Forbes, 1990).

A continuación, se describen los tres métodos más usados para el cálculo del paso de la luz en cristalinos humanos.

2.4.1 Método de las capas.

Figura 2.3

Representación esquemática de método de las capas.



Este método considera un GRIN constante a tramos. La idea esencial es considerar el cristalino dividido por finas franjas (ver figura 2.3) en las que se asume un índice de refracción constante. Para calcular el trayecto de la luz, se aplica reiteradamente la ley de Snell en cada superficie de separación entre dos capas (Bass, 2010). Así el trayecto total estará formado por pequeños segmentos de líneas rectas (ver figura 2.3).

Para aplicar este método es necesario calcular el vector normal en cada superficie que delimite dos capas. Obviamente, entre mayor sea el número de capas mayor será la exactitud lograda y también el número de cálculos necesarios. Este método tiene a su favor que es muy sencillo de implementar, sin embargo, tiende a ser ineficiente cuando se requieren resultados muy precisos debido al aumento brusco del número de capas necesarias.

El método de las capas es particularmente útil cuando se asume que el GRIN del cristalino está formado precisamente por capas de refracción constante. Cuando se asume una función continua como en nuestro caso (modelo bipolarabólico), es más conveniente utilizar los métodos que se describen en las dos secciones siguientes.

2.4.2 Resolución numérica de la ecuación de los rayos

El recorrido de un rayo de luz en una lente de GRIN y en particular en el cristalino está regido por la ecuación de los rayos luminosos (Born & Wolf, 1999):

$$\frac{d}{ds} \left[n(\vec{r}) \frac{d\vec{r}}{ds} \right] = \vec{\nabla}_n(\vec{r}), \quad (1.5)$$

donde s es la distancia recorrida por el rayo, \vec{r} el vector de posición y $n(\vec{r})$ el valor del índice de refracción.

Según los autores Sharma, Kumar y Ghatak (1982), el término $\vec{\nabla}_n(\vec{r})$ define la dirección de máxima variación del índice de refracción.

Realizando el cambio de variable $dt = ds/n$ en la ecuación (1.5) nos queda:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = n\vec{\nabla}_n, \quad (1.6)$$

Si se considera el $\vec{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$ entonces la ecuación (1.6) puede ser completada con las condiciones iniciales:

$$\vec{r}(0) = [x(0), y(0), z(0)] = [x_0, y_0, z_0], \quad (1.7)$$

$$\vec{r}'(0) = [x'(0), y'(0), z'(0)] = [\tau x_0, \tau y_0, \tau z_0], \quad (1.8)$$

Aquí (1.7) y (1.8) definen el punto y la dirección de entrada del rayo de luz. Por lo tanto, la ecuación (1.6) junto con (1.7) y (1.8) definen un problema de condiciones iniciales que puede ser resuelto numéricamente.

Resolver la ecuación anterior para calcular el trayecto de la luz a través del cristalino tiene como ventaja que se pueden escoger esquemas numéricos eficientes. Según la literatura consultada (Sharma, Kumar, & Ghatak, 1982), prácticamente en todos los casos se usa el método propuesto por Sharma, que consiste en un esquema Runge-Kutta explícito de cuarto orden.

El método que se expone en la próxima sección también se basa en la resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales. Aunque en este caso el sistema es algo más simple, también es necesario la aplicación de métodos numéricos para su resolución.

2.4.3 Aplicación del principio de Fermat

Este método según Muñoz-Villaescusa, Nuñez-Chongo y Batista Leyva (2014), consiste en considerar que el trazo del rayo de luz a través del cristalino puede

ser descrito tomando a r como función de z , para luego aplicar el principio de Fermat. Este es un principio variacional que plantea que el trayecto seguido por la luz al propagarse de un punto P_1 a otro P_2 , es tal que el tiempo empleado en recorrerlo es estacionario respecto a posibles variaciones de la trayectoria.

Lo anterior se expresa como:

$$\delta F[\vec{r}(s)] = \delta \int_{P_1}^{P_2} n(\vec{r}(s)) ds = 0, \quad (1.9)$$

donde s es la distancia recorrida por el rayo de luz, $\vec{r}(s)$ el radio vector que describe la trayectoria y $n(\vec{r}(s))$ el valor del índice de refracción en función de la posición.

En nuestro caso la ecuación (1.9) se transforma en:

$$\delta F[r(z)] = \delta \int_{z_1}^{z_2} n(z, r(z)) \sqrt{1 + r'^2} dz = 0, \quad (1.10)$$

La solución de la ecuación (1.10) en general consiste en encontrar la solución de la ecuación de Euler Lagrange asociada:

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dz} \left[\frac{\partial L}{\partial r'} \right] = 0, \quad (1.11)$$

donde $L(z, r, r') = n(z, r) \sqrt{1 + r'^2}$. Resolviendo (1.11) se obtiene la ecuación diferencial de segundo orden que describe la trayectoria del rayo:

$$r''(z) = \frac{1}{n(z, r)} (1 + r'^2) \left(\frac{\partial n}{\partial r} - \frac{\partial n}{\partial z} r' \right), \quad (1.12)$$

Para completar el problema de Cauchy se añaden las condiciones iniciales:

$$r(z_0) = r_0 \quad (1.13)$$

$$r'(z_0) = m_0 \quad (1.14)$$

donde (z_0, r_0) es el punto de entrada del rayo en el cristalino y m_0 la tangente que define la dirección inicial del rayo. La ecuación (1.12) puede ser resuelta numéricamente.

La ecuación diferencial del rayo (1.6) y la basada en el principio de Fermat (1.12), son equivalentes. Para determinar cuál se usará en este trabajo, se compararán las soluciones numéricas de ambas, en aras de determinar cuál requiere menos costo computacional.

En la próxima sección se mencionan los resultados más importantes encontrados en la literatura, relacionados con los métodos de reconstrucción del GRIN en cristalinos. Se hará énfasis en los métodos basados en el trazado de rayos.

2.4.4 Reconstrucción del GRIN en cristalinos

Los primeros intentos de determinar el GRIN en cristalinos se basaron en mediciones directas usando refractómetros de Abbe (Huggert, 1948; Weale, 1963) en años tan lejanos como 1948 y 1963.

Aunque estas mediciones eran poco confiables, pues destruían el cristalino en el proceso, dieron las primeras aproximaciones del índice de refracción en el núcleo y la superficie del cristalino de humanos y algunos animales.

El surgimiento de Tecnología como las Imágenes de Resonancia Magnética (IRM) ha permitido hacer muy buenas estimaciones e incluso estudiar las variaciones del GRIN con la edad y la acomodación realizando mediciones *in vivo*. La reconstrucción del GRIN mediante IRM se basa en la relación que existe entre las constantes de relajación de la señal de resonancia magnética y el índice de refracción (Jones, Atchinson, & Pope, 2007; Garner, Smith, Yao, & Augusteyn, 2001; Kasthurirangan, Markwell, Atchison, & Pope, 2008).

Otra forma de determinar el GRIN, es ajustando los parámetros de un modelo determinado a mediciones experimentales del trayecto de la luz a través del cristalino. Esto conlleva a un problema de optimización. A continuación, se dará una breve panorámica de algunos ejemplos donde se usan técnicas de optimización basadas en el trazado de rayos para la reconstrucción del GRIN en cristalinos.

Según Garner, Smith, Yao, y Augusteyn (2001), determinan el GRIN en cristalinos del pez Black Oreo Dory (*Alloctytus Niger*) por dos vías: usando un programa de optimización basado en la trayectoria de un láser a través del cristalino y usando resonancia magnética. Ambos métodos obtienen resultados

similares. Para la optimización se emplea el método de Gradientes Conjugados y para el cálculo del trazado del rayo la fórmula de Sharma (1982).

El investigador (De Castro, et al., 2010), usan un algoritmo genético programado en Matlab para encontrar los parámetros del GRIN. Las mediciones del trazo del rayo se obtienen usando imágenes de Tomografía de Coherencia Óptica (TCO). El trazado de rayos se realiza usando el algoritmo de A. Sharma (1982). En este caso, el modelo GRIN escogido es una modificación de (1.4), donde el parámetro p se toma como una función conocida de θ de manera que tome los valores p_1 en $\theta = 0$ y $\theta = \pi$ y p_2 en $\theta = -\frac{\pi}{2}$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$

Según De Castro, Barbero, Ortiz, y Marcos (2011), analizan la exactitud de los métodos de optimización para la reconstrucción del GRIN. Además, analizan la influencia de los errores en las mediciones, así como el número de estas a tomar. Obtienen que el uso combinado de algoritmos de optimización global y local permite reconstruir el GRIN con buena exactitud con un moderado nivel de ruido en los datos de entrada.

En los trabajos (De Castro, et al., 2011; De Castro, et al., 2013), se emplea la optimización basada en el trayecto del rayo para estudiar el cambio en el GRIN del cristalino con la edad y la acomodación respectivamente.

Los métodos de reconstrucción del GRIN basados en el trayecto del rayo difieren entre sí principalmente en qué información del trayecto es la usada para plantear el problema de optimización. Según De Castro (2010), el uso de TCO posibilita que la trayectoria del rayo dentro del cristalino sea visible en las imágenes, por lo que básicamente se cuenta con toda la información posible. En otros casos, como el abordado en este trabajo, solo se cuenta con los puntos y direcciones de salida del rayo al atravesar el cristalino. Aunque es menos información disponible, estos datos por lo general pueden ser obtenidos mediante experimentos sencillos sin la necesidad de usar tecnologías como la TCO.

CAPÍTULO III

MARCO METODOLÓGICO DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo se presentan los resultados relacionados con la metodología a utilizar en búsqueda de una propuesta de solución donde se describen los algoritmos predecesores al desarrollo en este trabajo. Se aplica el método de Experto para corroborar el valor científico metodológico, a partir de dos etapas: determinación de los expertos y la valoración de la Metodología del modelo biofísico que permitirá identificar los factores que inciden para obtener un método para la reconstrucción del GRIN en cristalinos humanos.

3.1 Diseño de la investigación

El presente trabajo de investigación se basó en un enfoque mixto, representan un conjunto de procesos sistemáticos, empíricos y críticos de investigación e implican la recolección y el análisis de datos cuantitativos y cualitativos, así como su integración y discusión conjunta, para realizar inferencias producto de toda la información recabada (meta-inferencias) y lograr un mayor entendimiento del fenómeno bajo estudio.

3.2 Tipo de métodos de investigación

En la investigación se utilizaron diferentes métodos, los fundamentales son mencionados a continuación:

- Los procedimientos lógicos del pensamiento, **análisis y síntesis**, así como la **inducción y deducción**, facilitaran la determinación de los fundamentos y teorías relacionadas con los modelos matemáticos y con énfasis en el modelo biofísico, lo que contribuirá a la sistematización de la información sobre el tema y a la elaboración del marco teórico de referencia.
- **Histórico-lógico** en el estudio de las diferentes enfermedades que ocurren en la visión, hasta los trabajos actuales relacionados con el modelo de GRIN parabólico.
- **Análisis de documentos** en la consulta de literatura especializada relacionada con la teoría de los modelos matemáticos.

- **Método de modelación**, que posibilitara establecer la existencia de niveles para destacar y representar las características y las relaciones entre los componentes del campo de acción.
- **Método de Experto** para corroborar el valor científico metodológico del modelo GRIN parabólico.
- **Métodos estadísticos** en la realización de estudios del modelo de GRIN bipolarabólico que se usará como caso de estudio.

Es significativo señalar que para evaluar el método se usó como caso de estudio un modelo de GRIN bipolarabólico y se simularon mediciones con distintos niveles de error.

3.3 Determinación de los expertos

En esta etapa se procede a explicar la aplicación del Método de Experto, para la valoración de los indicadores y de la Metodología de la propuesta del modelo matemático. Respecto a este método, la investigadora Oñate (1988), expresó que “el Método Delphi es la utilización sistemática del juicio intuitivo de un grupo de expertos para obtener un consenso de opiniones informadas”.

La esencia del método en cuestión es que los expertos expongan sus criterios sin consultarse e incluso sin conocerse entre sí, con una secuencia metodológica ordenada en varias rondas de encuestas, donde la primera obtiene la valoración estadística, la segunda informa a los expertos la distribución de las respuestas, permitiéndoles modificar sus opiniones con argumentos que las justifiquen y las siguientes comunican los criterios de la ronda anterior para que los expertos reconsideren sus valoraciones.

Con relación a las rondas, la investigadora Oñate (1988), opina que “la mayoría de los autores consideran que a partir de la tercera o cuarta ronda los expertos comienzan a mantener sus criterios”.

Con la información obtenida en cada ronda, se realiza entonces un procesamiento estadístico-matemático para dar objetividad a los criterios subjetivos de los expertos, esto es algo que diferencia el Método Delphi del resto

de los métodos de pronóstico subjetivo, pues la decisión final es un criterio avalado fuertemente por la experiencia de los expertos y por indicadores objetivos.

La fase de valoración en nuestra investigación se desarrolla en dos etapas: la primera, dedicada a la determinación de un conjunto de posibles especialistas a considerar como expertos para la propuesta de algoritmo y la segunda etapa, la constituyó la consulta a los expertos así seleccionados.

No se emplearon los métodos clásicos para la valoración de expertos como el Delphi, sino las ideas propuestas por L. Campistrous (1998) y C. Rizo (1998), del Instituto Central de Ciencias Pedagógicas de Cuba. En este trabajo los autores "proponen un Método que utiliza algunas de las características del Método Delphi" (Campistrous, 1998), pero que brinda una mayor objetividad a los criterios de los especialistas seleccionados a partir de los pasos siguientes:

- Selección de los expertos.
- Determinación de un grupo de indicadores que permita medir la pertinencia del procedimiento propuesto para la solución del problema de investigación.
- confección de una escala para medir los indicadores.
- confección de una encuesta para obtener los criterios de los expertos.
- Procesamiento estadístico de la información obtenida.
- Análisis de los resultados.
- No recomienda repetir varias veces las consultas para buscar concordancia porque pueden distorsionarse los criterios verdaderos.

Es importante tener en cuenta el criterio expresado por Campistrous (1998), cuando señala que:

Al utilizar el Método de Expertos como procedimiento empírico (...) estamos depositando gran parte de la confiabilidad del proceso en los hombros de los expertos que se seleccionen. Esto significa que la calidad de nuestro trabajo depende en gran medida de la calificación de los expertos que seleccionemos (Campistrous, 1998).

Los autores antes citados refieren la conveniencia de seleccionar el número mayor posible de expertos y de valorar los elementos estudiados con no menos de 30 especialistas que estudian el tema, o tienen experiencia práctica o investigan sobre los aspectos que integran esta metodología.

Se escogieron treinta y seis posibles expertos, los cuales fueron valorados según la metodología propuesta para su determinación como expertos; considerándose un mínimo de experiencia profesional en la temática que se investiga y la existencia de determinada información teórica en relación con la misma (ver anexo A).

De acuerdo con la metodología utilizada, se denota por Kc el Coeficiente de conocimiento del experto sobre el problema que se analiza, determinado este a partir de su propia valoración. Para obtenerlo se solicita al experto que valore su conocimiento sobre el problema en una escala de cero a diez.

En esta escala el cero representa la ausencia de conocimiento acerca del tema y el diez una información completa sobre el mismo. De acuerdo con su autovaloración, el sujeto ubica su conocimiento en algún punto de esta escala y el resultado se multiplica por 0,1 para llevarlo a la escala de 0 a 1.

En la siguiente tabla se muestra el Coeficiente de conocimiento acerca del tema:

Tabla 3.1.

Resumen del Coeficiente de conocimiento Kc.

Kc	1	0.8	0.6	0.4	0.2
Cantidad de personas	13	8	7	2	-

Teniendo en cuenta los valores de Kc en la tabla # 3.1 se precisan los siguientes intervalos para saber el grado de influencia:

- Alto: $0,9 \leq kc \leq 1$
- Medio: $0,6 < kc \leq 0,8$
- Bajo: $kc \leq 0,5$

En la población de los 30 expertos seleccionados y evaluados se obtuvieron los siguientes resultados: 13 presentaron un coeficiente de conocimiento alto

(43,3%), 15 un coeficiente de conocimiento medio (50%) y dos un coeficiente de conocimiento bajo para un (6,66 %).

De los 30 expertos seleccionados, 18 son Doctores en Ciencias que representan el 60%, 12 son Máster en Ciencias que representan el 40%, de ellos 10 son Profesores Titulares y 12 son Profesores Auxiliares, el resto son Asistentes. El 33,3% de los especialistas tiene más de 10 años de experiencia y el 66,6% tiene más de 20 años.

Se denota por K_a el Coeficiente de argumentación que trata de estimar, a partir del análisis del propio experto, el grado de fundamentación de sus criterios. Para determinar este coeficiente se le pide al experto que indique el grado de influencia (alto, medio o bajo) que tiene en sus criterios cada una de las siguientes fuentes: análisis teóricos realizados por él mismo, su experiencia, los trabajos de autores extranjeros, su conocimiento del estado del problema y su intuición.

Las respuestas dadas por el experto se valoran de acuerdo a una "tabla preestablecida" (Campistrous, 1998). Según los datos que aporta esta tabla, los análisis teóricos realizados por el experto y su propia experiencia en la temática, son las fuentes de argumentación cruciales para determinar la conveniencia del experto en el proceso de valoración.

En la siguiente tabla se muestra el Coeficiente de argumentación:

Tabla 3.2

Resumen del Coeficiente de argumentación K_a .

K_a	1	0.9	0.8	0.7	0.5	0.4
Cantidad de personas	18	9	3	-	-	-

Luego para la determinación de los criterios de alto, medio y bajo se utilizó la escala K_c (ver anexo B). De estos resultados se puede inferir que, de los 30 expertos seleccionados, 27 tienen un coeficiente de argumentación alto que representan el 90% y 3 expertos con un coeficiente de argumentación medio para un 10%.

Para hacer objetiva la selección de los expertos se empleó un procedimiento basado en los criterios auto valorativos de estos. Denominamos a ese criterio Coeficiente auto valorativos y lo denotamos simbólicamente por k.

Para el mismo se tomó en cuenta la autoevaluación de los posibles expertos acerca de su competencia y de las fuentes que les permiten argumentar sus criterios.

El coeficiente K se conforma a partir de otros dos coeficientes antes definidos Kc y Ka, mediante la siguiente fórmula:

$$K = \frac{1}{2} (Kc + Ka)$$

El coeficiente K puede alcanzar valores comprendidos entre 0,25 (mínimo posible) y 1 (máximo posible).

En realidad, los valores obtenidos aportan un criterio de significación para decidir si el experto debe ser incluido en el proceso de valoración (ver anexo C). Una vez calculado K para cada uno de los 36 posibles expertos a los que se les aplicó la encuesta, se seleccionaron lo que se encontraban en un límite inferior $K = 0,5$. Fueron seleccionados 30 (ver anexo D).

La media aritmética grupal para las mediciones de K resultó ser 0,83, lo cual evidencia la alta utilidad de los criterios valorativos de los sujetos encuestados y de la Metodología propuesta del modelo matemático. teniendo en cuenta que:

- Si $0.8 < K < 1.0$, el Coeficiente de competencia es alto.
- Si $0.6 < K < 0.8$, el Coeficiente de competencia es medio.
- Si $K < 0.5$, el Coeficiente de competencia es bajo.

Es importante señalar que los sujetos encuestados mostraron disposición real de colaborar en el trabajo, buena capacidad de análisis, creatividad y un elevado espíritu crítico y autocrítico. El criterio seguido para la selección de los expertos fue considerar aquellos que tuvieran un coeficiente de competencia alto o medio, por tanto, cumplieron con este criterio 30 de los encuestados.

En la tabla que aparece en el ANEXO D, se muestran los coeficientes Kc, Ka y el K resultante de cada uno de los 30 expertos consultados. Como resultado de la aplicación de este procedimiento se obtuvo que 23 de los encuestados poseen un nivel de competencia alto (76,6 %) y siete poseen un nivel de competencia medio (23,3 %).

3.4 Valoración de los expertos

Para el procesamiento estadístico de los datos se aplicó el modelo de Torgerson (Campistrous, 1998), utilizando como medio una hoja Excel soportada en Windows. Se elaboró una escala para efectuar la valoración integral.

De hecho, para la valoración de los expertos, se incluyeron los siguientes indicadores (ver anexo E):

1. Contribución de los parámetros que caracterizan el GRIN del cristalino como un problema de optimización.
2. Pertinencia del problema matemático que supone la reconstrucción del GRIN en cristalinos a partir del trazado de rayos.
3. Posibilidades de los métodos de Runge-Kutta con paso adaptativo utilizando las llamadas fórmulas de integración embebidas para obtener las aproximaciones.
4. Contribución del modelo bipolarabólico para describir el GRIN mediante dos polinomios cuadráticos.
5. Pertinencia del uso de la interpolación para evitar evaluaciones de función innecesarias.
6. Pertinencia del plano imaginario que divide el cristalino en el modelo bipolarabólico.
7. Pertinencia de los cinco parámetros independiente del modelo de GRIN bipolarabólico, con lo que es posible evaluar la función (2.3) dado un conjunto de mediciones experimentales del trayecto de la luz.
8. Contribución del método para la obtención de los parámetros que caracterizan el GRIN en cristalinos humanos *in vitro*, a partir de mediciones de la trayectoria de un rayo de luz.

A continuación, se resumen los resultados para cada categoría según la opinión de los 30 expertos encuestados utilizando tablas de matriz de frecuencias y la tabla de matriz de frecuencias acumuladas que se muestran en el ANEXO F.

En los resultados de la tabla de matriz de frecuencias se obtuvieron los valores de frecuencias acumuladas para cada uno de los indicadores evaluados.

Seguidamente se obtuvo una tabla de matriz de frecuencias acumuladas similar (ANEXO F), donde se resumen los resultados de los valores de frecuencia relativa acumulativa para los indicadores que están siendo evaluados.

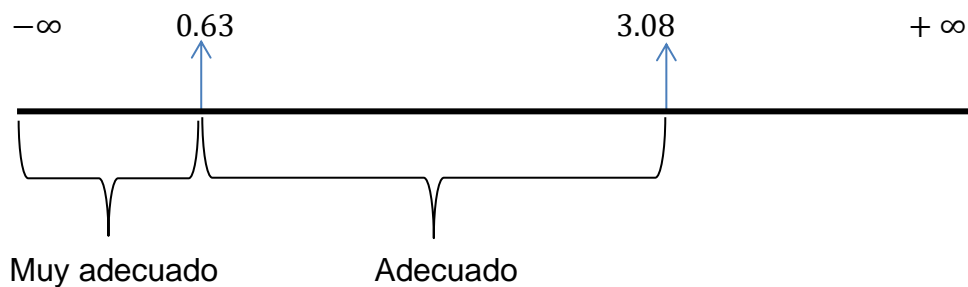
El siguiente paso consistió en obtener los valores de la desviación normal estándar inversa a partir de los resultados de las frecuencias relativas acumulativas.

Se observa que en este último paso mencionado la cantidad de categorías de la encuesta se ha reducido a dos, lo que posibilita delimitar dos intervalos para evaluar la categoría a la que pertenece cada indicador según la opinión de los expertos.

A partir de la evaluación de los puntos de corte y su comparación con los resultados de los parámetros de cada una de las filas del (ANEXO G) es posible valorar el grado de adecuación de cada uno de los ocho indicadores evaluados.

Figura 3.1

Representación de la recta de puntos de corte.



Por lo tanto, como se observa en el ANEXO G, la suma de las sumas menos el promedio (N-P) para los indicadores I1, I2, I3, I6, I7 e I8 a evaluar, resulta menor que el primer intervalo de los puntos de corte.

Este resultado permite aseverar que los expertos consultados consideran muy adecuada:

- Contribución de los parámetros que caracterizan el GRIN del cristalino como un problema de optimización.

- Pertinencia del problema matemático que supone la reconstrucción del GRIN en cristalinos a partir del trazado de rayos.
- Posibilidades de los métodos de Runge-Kutta con paso adaptativo utilizando las llamadas fórmulas de integración embebidas para obtener las aproximaciones.
- Pertinencia del plano imaginario que divide el cristalino en el modelo bipolarabólico.
- Pertinencia de los cinco parámetros independiente del modelo de GRIN bipolarabólico, con lo que es posible evaluar la función (2.3) dado un conjunto de mediciones experimentales del trayecto de la luz.
- Contribución del método para la obtención de los parámetros que caracterizan el GRIN en cristalinos humanos *in vitro*, a partir de mediciones de la trayectoria de un rayo de luz.

También consideran adecuada:

- Contribución del modelo bipolarabólico para describir el GRIN mediante dos polinomios cuadráticos.
- Pertinencia del uso de la interpolación para evitar evaluaciones de función innecesarias.

CAPITULO IV

MATERIALES Y MÉTODOS

En la primera sección de este capítulo se plantea el problema de encontrar los parámetros que caracterizan el GRIN del cristalino como un problema de optimización. Los datos de entrada son las mediciones del trayecto de la luz antes y después del cristalino.

En las próximas secciones se describen los métodos para el cálculo de la trayectoria del rayo de luz a través del cristalino y las particularidades numéricas de estos.

El modelo de GRIN bипarabólico, que se usará como caso de estudio, también se analiza. Al final se describe el experimento propuesto y los lenguajes de programación y bibliotecas de funciones usadas para la implementación de los algoritmos.

4.1 Planteamiento del problema

A continuación, se formalizará el problema matemático que supone la reconstrucción del GRIN en cristalininos a partir del trazado de rayos. Antes de entrar en detalles es preciso hacer notar lo siguiente: en la mayoría de los modelos matemáticos propuestos para describir el GRIN se asume simetría radial, además los rayos de luz que tienen importancia para el modelo del ojo son los que son coplanares con el eje óptico (eje Z, ver figura 4.1).

Partiendo de esto podemos hacer una importante simplificación: en adelante se enfocará el análisis solo en el plano ZW que contiene el eje óptico del cristalino, la coordenada z variará en la dirección axial y $w = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Supongamos que se cuenta con N mediciones de las posiciones y direcciones de rayos de luz antes y después del cristalino como se muestra en la figura 4.1. Los vectores $x_i; y_i \in R^3$ con $i = 1; 2; \dots; N$ tienen la forma $(z; w; m)$, es decir, sus dos primeras componentes indican un punto por el que pasa el rayo y la tercera

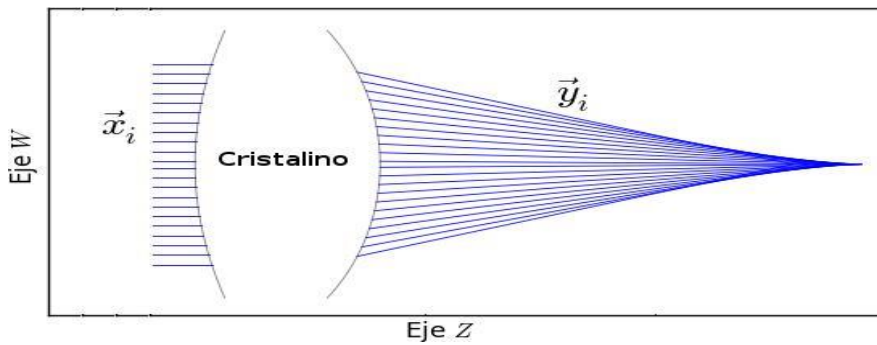
la pendiente de este en el plano ZW . Supongamos además que tenemos una función $\vec{F}: R^3 \rightarrow R^3$ dependiente de M parámetros $c_1; c_2; \dots; c_m$ tal que:

$$\vec{y}_i = \vec{F}(\vec{x}_i | c_1; c_2; \dots; c_m), \quad (2.1)$$

$\vec{F}(\vec{x})$ es la ley que a cada rayo de luz incidente en la cara anterior del cristalino asocia el punto y la dirección de salida de este en la cara posterior. En cristalinos sanos y sin excesiva opacidad, un rayo a la entrada del cristalino dará el mismo rayo en la salida y, dadas las características ópticas del medio; pequeños cambios en las condiciones iniciales provocan pequeños cambios a la salida.

Figura 4.1

Representación del trazado de rayos en el cristalino



Debido a que la trayectoria de la luz está determinada por el GRIN, es evidente que la función $\vec{F}(\vec{x})$ depende de este. De tal forma $c_1; c_2; \dots; c_m$ corresponderán a los parámetros que determinan el GRIN.

Dicho esto, definiremos el problema de la reconstrucción del GRIN como el de determinar los valores de $c_1; c_2; \dots; c_m$ para los que $\vec{F}(\vec{x})$ mejor se ajuste a las mediciones. Esto es, encontrar $c_1; c_2; \dots; c_m$ tales que:

$$\begin{aligned} \min \quad & G(c_1; c_2; \dots; c_m) \\ & c_1; \quad ; \dots; \\ & c_2 \quad \quad c_m \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\text{donde } G(c_1; c_2; \dots; c_m) = \sum_{i=1}^{i=N} \|\vec{y}_i - \vec{F}(\vec{x}_i | c_1; c_2; \dots; c_m)\|^2 \quad (2.3)$$

Como se ve, el método para la reconstrucción del GRIN se reduce a un problema de optimización para el que hay todo un arsenal de métodos disponibles. Sin embargo, en este caso hay una particularidad importante: la función de mérito

(2.3) en general no está definida mediante funciones elementales, sino que depende de $\vec{F}(\vec{x})$, que debe ser evaluada numéricamente.

Por lo tanto, es necesario hacer especial énfasis en obtener un método eficiente para el cálculo del trazado del rayo de luz a través del cristalino y así reducir el costo computacional de evaluar $\vec{F}(\vec{x})$. Téngase en cuenta que cada evaluación de $G(c_1; c_2; \dots; c_m)$ implica N evaluaciones de $\vec{F}(\vec{x})$, y esto puede ser muy costoso computacionalmente.

La función $\vec{F}(\vec{x})$ consta de cuatro pasos: aplicar la ley de Snell al rayo incidente en la cara anterior del cristalino a fin de obtener la pendiente del rayo refractado que entra al GRIN, cálculo de la trayectoria del rayo dentro del cristalino (este es el paso más complejo y costoso computacionalmente), determinación del punto de salida en la cara posterior y, finalmente, una nueva aplicación de la ley de Snell para obtener la pendiente de salida.

La ecuación (2.3) es bastante general. En realidad, por las características del experimento propuesto, los rayos entrantes en la superficie anterior del cristalino son paralelos al eje óptico y si se tiene en cuenta que el punto de entrada está sobre dicha superficie entonces los vectores \vec{x}_i tendrán la forma $(z(w); w; 0)$, de manera similar los vectores y_i serán de la forma $(z(w); w; m)$. Es decir, podemos considerar $\vec{x} \in R$ y $\vec{y}_i \in R^2$.

En la próxima sección se aborda el tema del cálculo de la trayectoria de la luz a través del cristalino y se describen distintas vías de realizar dicho cálculo que serán comparadas en aras de escoger la más eficiente.

4.2 Cálculo de la trayectoria de la luz a través del cristalino

Debido que el cálculo del trazo de la luz a través del cristalino es la piedra angular del método, en esta sección trataremos este problema en detalles. También se presentarán las fórmulas para la aplicación de la ley de Snell y la vía para calcular el punto de salida del rayo en la cara posterior del cristalino.

A fin de escoger la mejor forma de realizar dicho calculo se compararán varias vías existentes. Estas consisten en resolver la ecuación de los rayos (1.5) y la ecuación (1.12) por dos métodos numéricos: el primero es el esquema clásico de Runge-Kutta explícito de cuarto orden (RK4) y el segundo es el esquema de Runge-Kutta de paso adaptativo RK45 (Dormand & Prince, 1980).

Resolver la ecuación (1.5) mediante el esquema RK4 es, por mucho, el método más usado según la literatura, esta combinación se conoce como algoritmo de Sharma (1982), por lo que lo tomaremos como referencia para comparar el método propuesto por nosotros, que consiste en resolver la ecuación (1.12) mediante RK45. De tal forma se analizarán cuatro métodos diferentes combinando la ecuación a resolver y el esquema numérico usado. En lo adelante se hará referencia a dichos métodos mediante las abreviaturas que se muestran en la siguiente tabla.

Tabla 4.1

Combinación entre ecuación a resolver y el método numérico empleado.

	Método Numérico	
Ecuación a resolver	Runge- Kutta 4	Runge- Kutta 45
$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = n\vec{\nabla}n$	R-RK 4	R-RK 45
$r'' = \frac{1}{n(z,r)}(1 + r'^2)\left(\frac{\partial n}{\partial r} - \frac{\partial n}{\partial z}r'\right)$	F- RK4	F- RK45

A continuación, se describen los esquemas numéricos RK4 y RK45, así como los correspondientes problemas de Cauchy para las ecuaciones de la tabla 4.1.

4.2.1 El método de Runge-Kutta de orden cuatro RK4

Los métodos de Runge-Kutta (RK) son una familia de métodos creados para resolver el problema de Cauchy:

$$\frac{dy}{dx} = f(x; y) \quad (2.4)$$

$$y(x_0) = y_0 \quad (2.5)$$

La idea del método consiste en avanzar desde una solución conocida $(x_n; y_n)$ hasta $(x_{n+1}; y_{n+1})$ (aquí y_n es una aproximación de la solución exacta $y(x_n)$) de la siguiente forma:

$$x_{n+1} = x_n + h \quad (2.6)$$

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^s b_i K_i \quad (2.7)$$

donde

$$K_i = f(x_n + c_i h; y_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} K_j), i = 1, 2, \dots, s \quad (2.8)$$

Fijando un paso h y partiendo de la condición inicial $(x_0; y_0)$, los puntos $(x_i; y_i)$ quedan determinados de manera iterativa.

Los parámetros $b_i; c_i$ y a_{ij} determinan complemente el método y frecuentemente se escriben de forma abreviada mediante los arreglos de Butcher como el de la siguiente tabla.

Tabla 4.2

Arreglo de Butcher para los métodos de Runge-Kutta.

i	c_i	a_{ij}					b_i
1	c_1	a_{11}	a_{12}	c_1	b_1	
2	c_2	a_{21}	a_{22}	c_2	b_2	
.	
.	
.	
s	c_s	c_{s1}	c_{s2}	c_s	b_s	
	j	1	2	s-1		

Para la determinación de los valores de $b_i; c_i$ y a_{ij} se hace coincidir la parte derecha de la ecuación (2.7) con el desarrollo en series de Taylor de $y(x_n + h)$ hasta el orden de exactitud que se desee, determinándose así el error local del método.

Tabla 4.3:

Arreglo de Butcher para el método de Runge-Kutta explícito de cuarto orden.

i	c_i	a_{ij}			b_i
1					1
					-
	1	1			6
2					1
					-
	2	2			3
3					1
					-
	1	1			3
4					1
					-
	2	2			3
4					1
					-
	1	0	0	1	6
	j	1	2	3	

El método RK4 pertenece a la familia de métodos explícitos ($a_{ij} = 0, \forall j \geq i$). Según los valores de b_i ; c_i y a_{ij} que se especifican en la tabla 4.3, las fórmulas que definen el algoritmo de RK4 son las siguientes:

$$K_1 = f(x_n; y_n)$$

$$K_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}; y_n + \frac{K_1}{2}\right)$$

$$K_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}; y_n + \frac{K_2}{2}\right)$$

$$K_4 = f(x_n + h; y_n + K_3)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \quad (2.9)$$

El algoritmo RK4 tiene un error local de $O(h^5)$ y necesita cuatro evaluaciones de la función $f(x; y)$ por cada paso, siendo el esquema de RK de mayor orden donde el número de evaluaciones es igual al orden del método (se puede demostrar que es imposible obtener orden p con un número de evaluaciones $q \leq p$ para $p > 4$).

Esta última propiedad, junto a su fácil implementación hacen del método RK4 uno de los más populares para la resolución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias.

4.2.2 El método de Runge-Kutta con paso adaptativo RK45

A diferencia de los métodos de RK con paso fijo como el RK4 tratado anteriormente, los métodos con paso adaptativo se basan en variar la longitud del paso en cada iteración mediante la estimación del error cometido.

La estimación del error permite disminuir el valor del paso cuando el error supere un determinado umbral y agrandar este cuando el error sea muy pequeño.

Los métodos de Runge-Kutta con paso adaptativo usan las llamadas fórmulas de integración embebidas.

Estas forman un par: una tiene un error local de orden p y otra de orden $p + 1$. La idea es usarlas para obtener las aproximaciones $y_p(x_n)$ y $y_{p+1}(x_n)$ de $y(x_n)$ y luego estimar el error cometido con $y_p(x_n)$ (la aproximación de orden p) como:

$$E(h) = y_{p+1}(x_n) - y_p(x_n) \quad (2.10)$$

Lo que hace atractiva la fórmula (2.10) sobre otras formas de estimar el error como el doble paso, es que las aproximaciones $y_p(x_n)$ y $y_{p+1}(x_n)$ obtenidas por las fórmulas (2.7-2.8) comparten las mismas evaluaciones de $f(x; y)$.

Es decir, una vez que se tiene $y_{p+1}(x_n)$ no es necesario realizar ninguna nueva evaluación de $f(x; y)$ para llegar a $y_p(x_n)$. El valor de $E(h)$ se usará entonces para determinar cuándo es necesario modificar el tamaño del paso.

En este trabajo se usará la implementación del método RK45 que se encuentra en Press, Teukolsky, Vetterling y Flannery (2007). En este caso $p = 4$ y las fórmulas de integración embebidas son las siguientes:

$$y_5(x_n + h) = y_n(x_n) + \sum_{i=1}^7 b_i K_i \quad (2.11)$$

$$y_4(x_n + h) = y_n(x_n) + \sum_{i=1}^7 b^*_i K_i \quad (2.12)$$

por lo tanto:

$$E(h) = \sum_{i=1}^7 (b_i - b^*_i) K_i \quad (2.13)$$

En la tabla 4.4 se muestra el arreglo de Butcher correspondiente al método RK45, donde se ha agregado una columna al final para los valores de b^*_i . Los K_i se calculan según (2.8). Los valores de la tabla 4.4 se deben a Dormand y Prince (1980), y según Shampine (1986), han mostrado mejores resultados que otras propuestas.

Como en general se pretende resolver un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, $E(h)$ es un vector, así que es necesario obtener una medida escalar del error, en la implementación propuesta se usa:

$$e(h) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E_i^2(h)} \quad (2.14)$$

donde n es la dimensión de $E(h)$. Como el error local de la fórmula (2.12) es $O(h^5)$, se puede concluir que para h_1 y h_2 sean lo suficientemente pequeños se cumple que:

$$\frac{e(h_1)}{e(h_2)} = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^5 \quad (2.15)$$

Supongamos ahora que se realiza un paso de integración con $h = h_1$ que resulta en un error local $e(h_1)$ según (2.14).

Podemos determinar el paso que debería haberse usado para obtener un error aproximado ϵ haciendo en (2.15) $e(h_2) = \epsilon$ y despejando h_2 :

Tabla 4.4

Arreglo de Butcher para el método RK45

	c_i	a_{ij}						b_i	b^*_i
1								35	5179
	1	1						384	5760 0
2	—	—						0	0
	5	5							
	3	3	9					500	7571
3	—	—	—					—	—
	10	40	40					1113	1669 5
	4	44	56	32				125	393
4	—	—	—	—				—	—
	5	45	15	9				192	640
	8	19372	25360	64448	212			2187	92097
5									
	9	6561	2187	6561	729			6784	339200
		9017	355	46732	49	5103		11	187
6	1								
		3168	33	5247	176	18656		84	2100
				500	125	2187	1		1
		35					1		
7	1	—	0	—	—	—	—	0	—
				1113	192	6784	8		
		384					4		40
	j	1	2	3	4	5	6		

$$h_2 = h_1 \left[\frac{\epsilon}{e(h_1)} \right]^{\frac{1}{5}} \quad (2.16)$$

La ecuación (2.16) es el núcleo de la regulación del paso en el método RK45. Si se obtiene que $h_2 > h_1$ entonces se obtuvo un error aceptable y se puede pasar a la próxima iteración con $h = h_2$, si por el contrario se obtiene que $h_2 < h_1$ entonces se tiene un error muy grande y es necesario repetir el paso, pero ahora tomando $h = h_2$.

Como las fórmulas anteriores se basan en una aproximación del error, la fórmula (2.16) se sustituye en la práctica por una más conservadora:

$$h_2 = 0.9h_1 \left[\frac{\epsilon}{e(h_1)} \right]^{\frac{1}{5}} \quad (2.17)$$

Además, se añade la restricción $0.1 < h_2 / h_1 < 10$ para evitar que se aumente o disminuya muy bruscamente el paso de una iteración a otra. Un detalle importante es que, aunque la estimación del error se haga para la fórmula de orden p (2.12) realmente es la fórmula de orden $p + 1$ (2.12) la que se usa para aproximar $y(x_n)$ (esto se conoce como extrapolación de Richardson), de ahí que el valor de ϵ fijado tienda a sobreestimar el error real.

Aunque según la tabla 4.4 parezca que son necesarias siete evaluaciones de función por paso, eso solo es cierto para la primera iteración. Como K_7 coincide con $f(x_n + h; y_{n+1})$ esa evaluación se ahorra en la próxima iteración (FSAL: *rst-same-as-last*).

Por lo tanto, el método RK45 realiza 6 evaluaciones de función por paso, a estas hay que añadir las adicionales debidas a las iteraciones que sean rechazadas según (2.17).

Comparando con RK4, se espera que el mayor número de evaluaciones necesarias en RK45 sean compensadas con una menor cantidad de iteraciones debido a la regulación del paso. A esto se le suma que el método RK45 es en realidad, debido a la extrapolación de Richardson, de orden cinco, un orden mayor que RK4.

Con los esquemas RK4 y RK45 se resolverán las ecuaciones (1.6) y (1.12). A continuación, se plantea el correspondiente problema de Cauchy para cada ecuación.

4.2.3 Problema de Cauchy para la ecuación derivada del principio de Fermat

Para poder resolver numéricamente la ecuación derivada del principio de Fermat (1.12) con los esquemas RK4 y RK45 descritos anteriormente, es necesario plantear el correspondiente problema de Cauchy de la forma (2.5-2.5).

Si se sustituye la coordenada r por w en la ecuación (1.12) se obtiene:

$$w'' = \frac{1}{n(z;w)}(1 + w'^2)\left(\frac{\partial n}{\partial w} - \frac{\partial n}{\partial z} w'\right) \quad (2.18)$$

Como la ecuación (2.18) es de segundo orden se hace el cambio de variable $m(z) = w'(z)$ para obtener el sistema de ecuaciones ordinarias de primer orden (2.19-2.20).

$$w'(z) = m(z) \quad (2.19)$$

$$w'(z) = \frac{1}{n(z;w)}(1 + m^2(z))\left[\frac{\partial n}{\partial w} - \frac{\partial n}{\partial z} w'\right] \quad (2.20)$$

Para completar el problema de Cauchy es necesario especificar las condiciones iniciales, en este caso vienen dadas por:

$$w(z_0) = w_0 \quad (2.21)$$

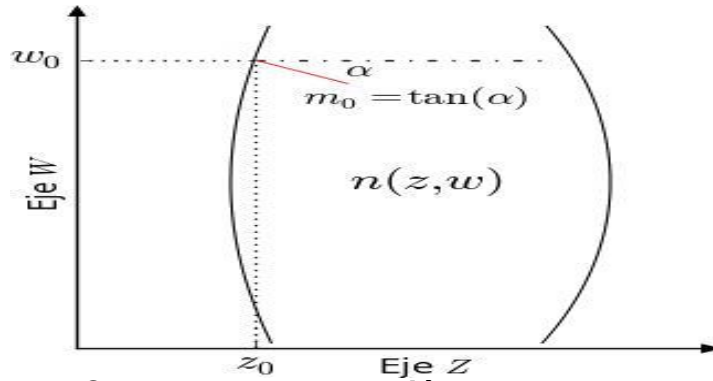
$$m(z_0) = m_0 \quad (2.22)$$

El punto $(z_0; w_0)$ marca la entrada del rayo al cristalino y m_0 es la pendiente de entrada como se muestra en la figura 4.2. Note que en la figura 4.2 el rayo de luz (línea roja) está representado a la derecha de la cara anterior del cristalino, esto es así porque el valor de m_0 que se toma como condición inicial es la pendiente del rayo refractado que se obtiene luego de aplicar la ley de Snell al rayo incidente en $(z_0; w_0)$.

Más adelante se desarrollarán las fórmulas correspondientes para la aplicación de la ley de Snell en las superficies del cristalino.

Figura 4.2

Rayo de luz entrando al cristalino.



4.2.4 Problema de Cauchy para la ecuación del rayo

Para plantear el correspondiente problema de Cauchy para la ecuación (1.6) tendremos en cuenta que en el plano ZW se tiene $\vec{r}(t) = (z(t); w(t))$. Haciendo

el cambio de variable $\vec{\tau}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$ se obtiene:

$$\vec{r}'(t) = \vec{\tau}(t) \quad (2.23)$$

$$\vec{\tau}'(t) = n(z; w) \vec{\nabla} n(z; w) \quad (2.24)$$

Para escribir el sistema anterior en su forma escalar hagamos $\vec{\tau}'(t) = (\tau_z'(t); \tau_w'(t))$:

$$z'(t) = \tau_z(t) \quad (2.25)$$

$$w'(t) = \tau_w(t) \quad (2.26)$$

$$\tau_z'(t) = n(z; w) \frac{\partial n}{\partial z} \quad (2.27)$$

$$\tau_w'(t) = n(z; w) \frac{\partial n}{\partial w} \quad (2.28)$$

Antes de pasar a las condiciones iniciales es necesario remitirse a la ecuación original (1.5) de la cual se obtuvo (1.6).

Como se llega a la ecuación (1.6) mediante el cambio de variables $dt = ds|n$ tenemos que:

$$\vec{\tau}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}(s)}{ds} \frac{ds}{dt} \quad (2.29)$$

$$\vec{\tau}(t) = n \frac{d\vec{r}(s)}{ds} \quad (2.30)$$

Como s es la longitud del camino recorrido por el rayo, el vector $\frac{d\vec{r}(s)}{ds}$ es unitario, de ahí que el módulo del vector $\vec{\tau}(t)$ sea igual a $n(z(t); w(t))$. Con esta información las condiciones iniciales quedan como sigue:

$$z(t_0) = z_0 \quad \mathbf{(2.31)}$$

$$w(t_0) = w_0 \quad \mathbf{(2.32)}$$

$$\tau_z(t_0) = n(z_0; w_0)tz_0 \quad \mathbf{(2.33)}$$

$$\tau_w(t_0) = n(z_0; w_0)tw_0 \quad \mathbf{(2.34)}$$

donde $(tz_0; tw_0)$ es el vector unitario tangente a la trayectoria del rayo. El valor de t_0 puede ser fijado de manera arbitraria. Por comodidad se usar $t_0 = 0$. Podemos escribir las ecuaciones (2.31-2.34) ya en función $z_0; w_0$ y m_0 , de manera que se ajusten mejor a las variables obtenidas en el experimento:

$$Z(0) = z_0 \quad \mathbf{(2.35)}$$

$$W(0) = w_0 \quad \mathbf{(2.36)}$$

$$\tau_z(0) = \frac{n(z_0; w_0)}{\sqrt{1+m_0^2}} \quad \mathbf{(2.37)}$$

$$\tau_w(0) = \frac{m_0 n(z_0; w_0)}{\sqrt{1+m_0^2}} \quad \mathbf{(2.38)}$$

4.2.5 Aplicación de la ley de Snell en la superficie del cristalino

Debido a que en el cálculo del trazado del rayo es necesario aplicar la ley de Snell a la entrada y a la salida del cristalino; se hace necesario desarrollar las fórmulas correspondientes.

La ley de Snell permite calcular la desviación de la luz al atravesar la superficie de separación entre dos medios de índices de refracción distintos.

Matemáticamente se expresa como:

$$n_1 \text{sen}(\alpha_1) = n_2 \text{sen}(\alpha_2) \quad \mathbf{(2.39)}$$

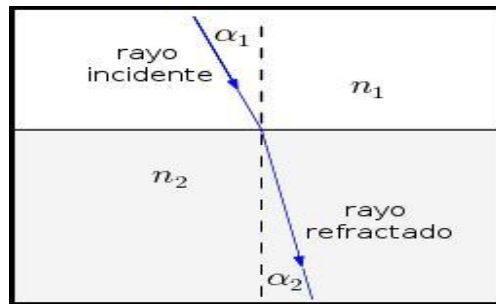
donde n_1 y n_2 son los índices de refracción de los medios, α_1 y α_2 los ángulos que forma con la dirección normal a la superficie el rayo incidente y el refractado respectivamente (ver figura 4.3).

Para obtener la formulación que necesitamos tendremos en cuenta que la superficie que separa ambos medios está descrita por:

$$S(z; w) = w^2 + (1 + Q)z^2 - 2R_z = 0 \quad \mathbf{(2.40)}$$

Figura 4.3

Representación esquemática de la refracción de la luz.



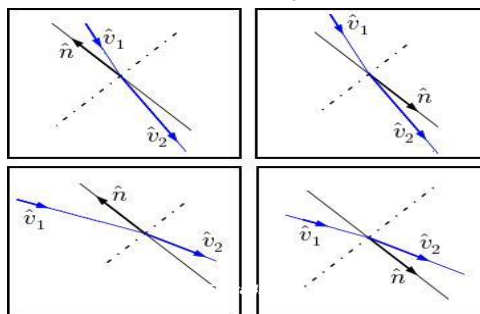
Se asume que se conocen el versor que caracteriza el rayo incidente

$\hat{v}_1 = a_1\hat{i} + b_1\hat{j}$, los índices de refracción n_1 y n_2 y el versor $\hat{n} = n_a\hat{i} + n_b\hat{j}$ normal a la superficie en el punto de entrada $(z_0; w_0)$. El objetivo es encontrar una expresión para el versor refractado $\hat{v}_2 = a_2\hat{i} + b_2\hat{j}$ en función de $n_1; n_2; \hat{v}_1$ y \hat{n} .

Es fácil comprobar que los vectores $\hat{v}_1 \times \hat{n}$ y $\hat{v}_2 \times \hat{n}$ tienen el mismo sentido (comprobar usando la regla de la mano derecha auxiliándose de la figura 4.4) y además como se cumple que $\text{sen}(\alpha_1) = |\hat{v}_1 \times \hat{n}|$ y $\text{sen}(\alpha_2) = |\hat{v}_2 \times \hat{n}|$, es posible expresar (2.39) de manera vectorial:

Figura 4.4

Posibles combinaciones de los versores \hat{v}_1 , \hat{v}_2 y \hat{n} en la refracción.



$$n_1(\hat{v}_1 \times \hat{n}) = n_2(\hat{v}_2 \times \hat{n})$$

$$\hat{v}_2 \times \hat{n} = \frac{n_1}{n_2}(\hat{v}_1 \times \hat{n}) \quad \mathbf{(2.41)}$$

La ecuación (2.41) aún no es suficiente para determinar \hat{v}_2 . Para complementar tengamos en cuenta que los valores $\langle \hat{v}_1; \hat{n} \rangle$ y $\langle \hat{v}_2; \hat{n} \rangle$ tienen el mismo signo (ver figura 4.4), de ahí que se pueda plantear:

$$\langle \hat{v}_2; \hat{n} \rangle = \text{sgn}(\langle \hat{v}_1; \hat{n} \rangle) \sqrt{1 - \text{sen}^2(\alpha_2)}$$

$$\langle \widehat{v}_2; \widehat{n} \rangle = \text{sgn}(\langle \widehat{v}_1; \widehat{n} \rangle) \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \text{sen}^2(\alpha_2)}$$

$$\langle \widehat{v}_2; \widehat{n} \rangle = \text{sgn}(\langle \widehat{v}_1; \widehat{n} \rangle) \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 |\widehat{v}_1 \times \widehat{n}|^2} \quad (2.42)$$

Aquí $\text{sgn}(\cdot)$ es la función signo.

Combinando las ecuaciones (2.41) y (2.42) se puede determinar unívocamente el versor \widehat{v}_2 . Descomponiendo los versores en sus componentes se obtiene:

$$n_b a_2 - n_a b_2 = \frac{n_1}{n_2} (n_b a_1 - n_a b_1) = D_1 \quad (2.43)$$

$$n_a a_2 + n_b b_2 = \delta(\widehat{v}_1; \widehat{n}) \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 (n_b a_1 - n_a b_1)^2} = D_2 \quad (2.44)$$

$$a_2 = \frac{D_1 n_b + D_2 n_a}{n_a^2 + n_b^2} = D_1 n_b + D_2 n_a \quad (2.45)$$

$$b_2 = \frac{-D_1 n_a + D_2 n_b}{n_a^2 + n_b^2} = D_2 n_b - D_1 n_a \quad (2.46)$$

El versor normal a la superficie \widehat{n} en $(z_0; w_0)$ se obtiene calculando el gradiente de la ecuación (2.40) y luego normalizándolo:

$$\vec{n} = \vec{\nabla} S(z; w)|_{(z_0; w_0)} = 2[z_0(1+Q) - R]\hat{i} + 2w_0\hat{j}$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{[z_0(1+Q) - R]\hat{i} + w_0\hat{j}}{\sqrt{[z_0(1+Q) - R]^2 + w_0^2}} \quad (2.47)$$

Para el caso de la superficie anterior, n_1 se toma como el índice de refracción del medio que rodea el cristalino y n_2 como $n(z_0; w_0)$. En la superficie posterior $n_1 = n(z_f; w_f)$ ($(z_f; w_f)$ es el punto de salida del rayo) y n_2 es el índice del medio. Aunque las fórmulas anteriores se han desarrollado de manera vectorial, es muy sencillo obtener el versor \widehat{v}_1 teniendo la pendiente m_1 del rayo incidente según las fórmulas:

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{1+m_1^2}} \quad (2.48)$$

$$b_1 = \frac{m_1}{\sqrt{1+m_1^2}} \quad (2.49)$$

$$m_1 = \frac{b_1}{a_1} \quad (2.50)$$

De la misma forma, una vez calculado \widehat{v}_2 es posible obtener la pendiente m_2 del rayo refractado haciendo:

$$m_2 = \frac{b_2}{a_2} \quad (2.51)$$

4.2.6 Cálculo del punto de salida del rayo

Una particularidad del cálculo del trazo de luz a través del cristalino es que no sabemos a priori hasta que valor se hará la integración de la ecuación diferencial correspondiente, debido a que este depende del intercepto del rayo con la superficie posterior. En los métodos F-RK4 y F-RK45 al menos se sabe que la integración no debe pasar de $z = l$, donde l es la longitud axial del cristalino.

En R-RK4 y R-RK45, donde la variable de integración es t , no podemos hacer el mismo razonamiento. Para resolver este problema, la idea es integrar hasta obtener un punto $(z_n; w_n)$ que se encuentre fuera del cristalino y en este punto se detiene la integración. Evidentemente el intercepto con la superficie de salida estará en el trayecto entre $(z_{n-1}; w_{n-1})$ y $(z_n; w_n)$.

La ecuación de la superficie posterior del cristalino no es más que la ecuación (2.40) desplazada a la posición $z = l$:

$$w^2 + (1 + Q)(z - 1)^2 - 2R(z - 1) = 0 \quad (2.52)$$

$$z = \begin{cases} l + \frac{1}{Q+1} (R - \sqrt{R^2 - (1 + Q)w^2}) & \text{Si } R > 0 \\ l + \frac{1}{Q+1} (R + \sqrt{R^2 - (1 + Q)w^2}) & \text{Si } R < 0 \end{cases} \quad (2.53)$$

Desde el punto de vista numérico la ecuación anterior no es muy conveniente, pues se vuelve inestable cuando w toma valores muy pequeños debido al efecto de cancelación catastrófica ($|R| \approx \sqrt{R^2 - (1 + Q)w^2}$, cuando $w \approx 0$). En la implantación se usará la fórmula equivalente (2.54) que es más estable.

$$z = \begin{cases} l + \frac{w^2}{R + \sqrt{R^2 - (Q + 1)w^2}} & \text{si } R > 0 \\ l + \frac{w^2}{R + \sqrt{R^2 - (Q + 1)w^2}} & \text{si } R < 0 \end{cases} \quad (2.54)$$

Auxiliándose de la fórmula (2.54) se definirá la función $D(z; w)$ que cuantifica la distancia horizontal entre el punto $(z; w)$ y la superficie (2.52):

$$D(z; w) = \begin{cases} z - l - \frac{w^2}{R + \sqrt{R^2 - (Q + 1)w^2}} & \text{si } R > 0 \\ z - l - \frac{w^2}{R - \sqrt{R^2 - (Q + 1)w^2}} & \text{si } R < 0 \end{cases} \quad (2.55)$$

Es fácil verificar que $D(z; w)$ toma valores negativos cuando $(z; w)$ está a la izquierda de la superficie; cero cuando está sobre ella y positivos cuando está a la derecha. Por lo tanto; se usará $D(z; w)$ para determinar el punto $(z_n; w_n)$ donde se detendrá la integración.

Como el punto de salida estará en el último tramo de integración $[x_{n-1}; x_n]$ (x se sustituye por t o z según corresponda) la idea es buscar la raíz de $D(z; w)$ en dicho tramo. Para evaluar $D(z; w)$ en $[x_{n-1}; x_n]$, una primera aproximación es utilizar el mismo esquema de integración, sin embargo; esta idea puede ser muy costosa debido al número de evaluaciones de función.

El uso de la interpolación puede ser muy útil en este caso, evitando evaluaciones de función innecesarias. Para el método de RK4 se utilizará un polinomio de grado tres tal como se especifica en Sharma (1982), dicho polinomio queda determinado según la fórmula:

$$\begin{aligned} x &\in [x_{n-1}; x_n] \\ h &= x_{n+1} - x_n \\ \theta &= \frac{x - x_n}{h} \end{aligned}$$

$$y(x) = (1 - \theta)y_n + \theta y_{n+1} + \theta(\theta - 1)[(1 - 2\theta)(y_{n+1} - y_n) + (\theta - 1)hf_n + \theta hf_{n+1}] \quad (2.56)$$

Para el caso de F-RK4 en la fórmula anterior se sustituye x por z ; y_n por el vector $(w_n; m_n)$ y f_n es el vector formado por la parte derecha de (2.19-2.20) evaluada en $(z_n; w_n; m_n)$. De forma análoga para R-RK4, x se reemplaza por t , y_n por

$(z_n; w_n; tz_n; tw_n)$ y f_n por la parte derecha de (2.25-2.28) evaluada en $(t_n; z_n; w_n; tz_n; tw_n)$. La fórmula (2.56) es un ejemplo de interpolación de Hermite y para poder usarla en el último tramo $[x_n; x_{n+1}]$ es necesario una evaluación extra de función (la que corresponde a f_{n+1}).

Una idea similar se usará con el método RK45. En este caso se usará un polinomio de grado cuatro. A continuación, se presentan las correspondientes fórmulas que son descritas en detalle en Dormand y Prince (1986) y Shampine (1986).

$$C_1 = y_n \quad \text{(2.57)}$$

$$C_2 = y_{n+1} - y_n \quad \text{(2.58)}$$

$$C_3 = hf_n - C_2 \quad \text{(2.59)}$$

$$C_4 = C_2 - hf_{n+1} - C_3 \quad \text{(2.60)}$$

$$C_5 = h(d_1f_n + \sum_{i=3}^6 d_i k_i + d_7 f_{n+1}) \quad \text{(2.61)}$$

$$x \in [x_{n-1}; x_n]$$

$$h = x_{n+1} - x_n$$

$$\theta = \frac{x - x_n}{h}$$

$$\text{(2.62) } y(x) = C_1 + \theta \left\{ C_2 + (1 - \theta)[C_3 + \theta(C_4 + (1 - \theta)C_5)] \right\}$$

Los valores de d_i se muestran en la tabla 4.5. La ecuación (2.62) es notablemente más complicada que (2.56) pero permite obtener un error global de orden cuatro como se demuestra en Dormand y Prince (1986), y Shampine, (1986), además no es necesario una evaluación extra de función ya que f_{n+1} se obtiene de K_7 .

Tabla 4.5

Coefficientes d_i usados en las fórmulas (2.57-2.61)

d_1	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7
12715105075	8748747970	10690763975	70198025287	1453857185	699979
	0		5		45
11282082432	3270041079	1880347072	19931678963	822651844	293804
	9		2		23

Finalmente, las ecuaciones (2.56) y (2.62) pueden ser usadas para parametrizar $D(z; w)$ en $[x_n; x_{n+1}]$ y aplicar el algoritmo de bisección para encontrar el punto de intersección con la superficie.

4.3 El modelo de GRIN bipolarabólico

El modelo bipolarabólico dado por la ecuación (1.3) propone describir el GRIN mediante dos polinomios cuadráticos de la forma:

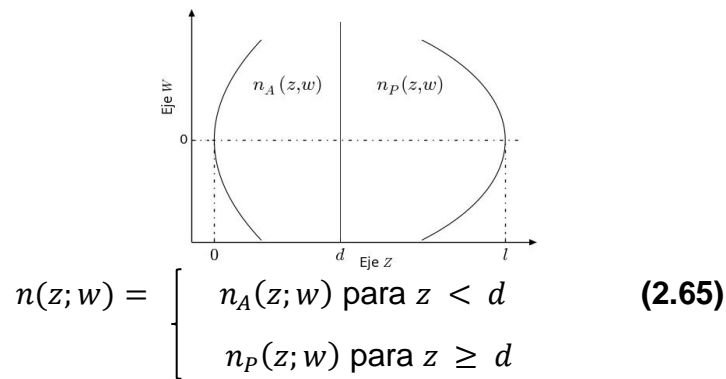
$$n_A(z; w) = n_{a0} + n_{a1}z^2 + n_{a2}z + n_{a3}w^2 \quad (2.63)$$

$$n_P(z; w) = n_{p0} + n_{p1}z^2 + n_{p2}z + n_{p3}w^2 \quad (2.64)$$

Las funciones $n_A(z; w)$ y $n_P(z; w)$ representan el GRIN en la parte anterior y posterior del cristalino respectivamente. Dichas partes están divididas por un plano imaginario situado en la posición $z = d$ tal como se muestra en la siguiente figura. Finalmente, el GRIN queda definido por:

Figura 4.5

Plano imaginario que divide el cristalino en el modelo bipolarabólico.



y los parámetros $n_{a0}; n_{a1}; \dots; n_{p3}$ se escogen de manera tal que $n(z; w) \in C^1$ y que alcance su valor máximo en el núcleo del cristalino $(d; 0)$. En $n_A(z; w)$ la coordenada z se mide a partir de $z = 0$ y en $n_P(z; w)$ a partir de $z = d$.

En lugar de intentar encontrar cuáles son las relaciones entre los parámetros $n_{a0}; n_{a1}; \dots; n_{p3}$ que garantizan la definición anterior de $n(z; w)$, se

transformarán $n_A(z; w)$ y $n_P(z; w)$ de manera que sus parámetros sean independientes. Esto simplificará el problema de optimización.

Es fácil verificar que la definición de $n(z; w)$ conlleva a que:

$$\frac{\partial n_A(z; w)}{\partial z} \Big|_{(d; w)} = \frac{\partial n_P(z; w)}{\partial z} \Big|_{(0; w)} = 0 \quad (2.66)$$

Ambas derivadas son iguales debido a que $n(z; w) \in C^1$ y que sean cero viene dado porque $n(z; w)$ en el punto $(d; 0)$ tiene un máximo (núcleo del cristalino) y a que $\frac{\partial n}{\partial z}$ no depende de w . Por lo tanto:

$$2n_a1d + n_a2 = 0 \quad (2.67)$$

$$n_p2 = 0 \quad (2.68)$$

En las ecuaciones (2.63-2.64) podemos, sin perder generalidad, remplazar z por $z + d$ (es decir, la coordenada z se mide ahora a partir de $z = d$ en ambas ecuaciones) para obtener:

$$n_A(z; w) = n_a0 + n_a1(z - d)^2 + n_a3w^2 \quad (2.69)$$

$$n_P(z; w) = n_p0 + n_p1(z - d)^2 + n_p3w^2 \quad (2.70)$$

También tiene que cumplirse que:

$$\frac{\partial n_A(z; w)}{\partial w} \Big|_{(d; w)} = \frac{\partial n_P(z; w)}{\partial w} \Big|_{(d; w)} \quad (2.71)$$

por lo tanto, $n_a3 = n_p3 = n_0$. Por último, se tiene que $n_A(d; w) = n_P(d; w)$ por lo tanto $n_a0 = n_p0 = n_N$, quedando finalmente:

$$n_A(z; w) = n_N + n_a1(z - d)^2 + n_0w^2 \quad (2.72)$$

$$n_P(z; w) = n_N + n_p1(z - d)^2 + n_0w^2 \quad (2.73)$$

Es decir:

$$n(z; w) = \begin{cases} n_N + n_a1(z - d)^2 + n_0w^2 & \text{para } z < d \\ n_N + n_p1(z - d)^2 + n_0w^2 & \text{para } z \geq d \end{cases} \quad (2.74)$$

Por lo tanto, nuestro modelo de GRIN bipolarabólico y por ende la función $\vec{F}(x)$ definida en (2.1) dependerán de cinco parámetros independientes:

- d : distancia a la que se encuentra el núcleo del cristalino desde su cara anterior.

- n_N : valor del índice de refracción en el núcleo.
- n_a : caracteriza la variación axial del GRIN en la parte anterior.
- n_p : caracteriza la variación axial del GRIN en la parte posterior.
- n_0 : caracteriza la variación radial del GRIN.

Hasta aquí se ha descrito la forma de calcular el trayecto de la luz a través del cristalino y se han definido los parámetros del modelo de GRIN biparabólico, con lo que es posible evaluar la función (2.3) dado un conjunto de mediciones experimentales del trayecto de la luz antes y después del cristalino (vectores \vec{x}_i e \vec{y}_i). Como se dijo con anterioridad, la idea es que estas mediciones puedan ser obtenidas de un experimento sencillo. A continuación, se describe dicho experimento.

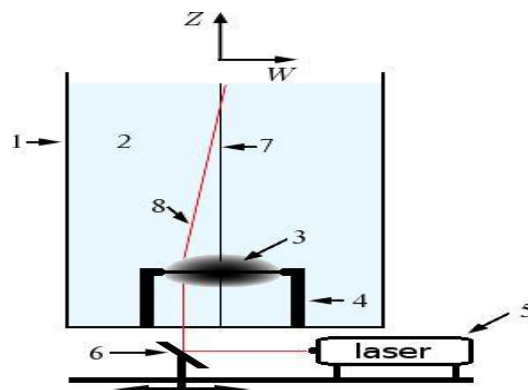
4.4 El experimento

Como nuestro método para la reconstrucción del GRIN se basa en mediciones experimentales del trayecto de la luz al atravesar el cristalino, se hace necesario describir una vía para obtener dichas mediciones.

Un experimento sencillo para lograr este objetivo se muestra en la siguiente figura.

Figura 4.6

Experimento para el trazado de rayos



Cada uno de los elementos señalados con números se describen a continuación:

1. Tanque de cristal transparente.
2. Fluido de índice de refracción conocido con pequeñas partículas suspendidas que le permitan dispersar la luz y hacer visible la trayectoria de esta en su interior.

3. Cristalino. Está ubicado con la cara anterior hacia abajo.
4. Pedestal que sirve de soporte al cristalino.
5. Laser.
6. Espejo montado sobre un soporte móvil que le permite desplazarse lateralmente.
7. Representa el eje óptico del cristalino.
8. Haz de luz laser que se refleja en el espejo (6) y entra al cristalino paralelo al eje óptico (7) saliendo por la cara posterior.

La esencia del experimento consiste en mover el espejo (6) para dirigir el rayo de luz a cualquier posición a lo largo del eje W determinándose así el punto de entrada en la superficie anterior del cristalino. Luego, como el fluido del tanque dispersa la luz, la dirección y el punto de salida del rayo en la cara posterior son observables. Usando una cámara digital se puede obtener una imagen de la parte frontal del tanque y de esta extraer la posición y la dirección de salida del rayo en el plano ZW . A continuación, se describe como hacer esto.

4.4.1 Obtención del punto y dirección de salida del rayo a partir de la imagen.

Una vez obtenida la imagen que muestra el trayecto del láser, lo primero es establecer cuál es el tamaño de los píxeles. Esto se logra ubicando distancias conocidas en la imagen y midiendo el número de píxeles correspondientes.

En concreto, puede moverse el espejo a dos posiciones distintas y luego medir la distancia en píxeles que separan los rayos. Una vez hecho esto, a cada píxel de la imagen puede asignársele la correspondiente coordenada en el plano ZW . Para determinar la pendiente del rayo de salida debemos obtener una imagen binaria donde los píxeles correspondientes al trazo tengan intensidad 1 y los demás 0. La ecuación de la recta se determina entonces mediante un ajuste por mínimos cuadrados.

Con la ecuación de la recta se tiene el valor de la pendiente e interceptándola con la cara posterior del cristalino se obtiene el punto de salida. Para lograr la

imagen binaria puede aplicarse un procedimiento sencillo: cada fila de la imagen se normaliza según el píxel de mayor intensidad (que debe pertenecer al trayecto del rayo), luego se toma 0.95 (o un valor similar) como umbral (Jones, Atchison, Meder, & Pope, 2005).

4.5 Lenguajes de programación y bibliotecas de funciones

Para la implementación de los programas creados en este trabajo se emplearon los lenguajes C++ y Python 2.7. En concreto, el cálculo del trazado del rayo se implementó en C++, para la optimización se usó el módulo Scipy (<http://scipy.org>) de Python y para la realización de los gráficos Matplotlib (<http://matplotlib.org>). También se usó la biblioteca Boost (<http://www.boost.org>) de C++ para realizar cálculos con aritmética de alta precisión.

CAPÍTULO V

EXPERIMENTACIÓN Y RESULTADOS

En la primera sección de este capítulo se comparan los métodos descritos en el capítulo anterior para el cálculo de la trayectoria del rayo a través del cristalino, con el objetivo de escoger el más eficiente. En las próximas secciones se presentan los resultados de la realización de experimentos numéricos en aras de evaluar el método de reconstrucción del GRIN, para el caso concreto del modelo biparabólico. En estos experimentos se analiza la influencia de los errores de las mediciones experimentales en la exactitud de la reconstrucción del GRIN, así como el número de mediciones a tener en cuenta.

5.1 Comparación de los métodos para el cálculo de la trayectoria de la luz

Como se vio en el capítulo anterior, poder calcular eficientemente la trayectoria de la luz a través del cristalino, es de vital importancia. Esto se debe a que la función de mérito (2.3) depende directamente de esto. En esta sección se comparan los métodos para realizar dicho cálculo: F-RK4, F-RK45, R-RK4 y F-RK45, descritos anteriormente (ver tabla 4.1). Los resultados que se muestran a continuación fueron publicados en Cruz-Rodríguez, Batista-Planas, Nuñez-Chongo, Muñoz-Villaescusa y Batista-Leyva (2015).

Como criterio de comparación se tomó el número de evaluaciones de función (en F-RK4 y F-RK45 esta función se refiere a la parte derecha de las ecuaciones (2.19-2.20) y en R-RK4 y R-RK45 a la parte derecha de las ecuaciones (2.25-2.28)) necesarias para alcanzar un determinado error en el cálculo del punto de salida del rayo $(z_f; w_f)$ (concretamente en w_f pues z_f está determinada por la ecuación de la superficie posterior) y su pendiente w_f .

Cada uno de los métodos se implementó en el lenguaje C++ usando aritmética de punto flotante de 64 bits (variable del tipo double). Los resultados de cada método, se compararon con los obtenidos usando el esquema de Runge-Kutta de paso adaptativo RK853 descrito en Press, Teukolsky, Vetterling y Flannery (2007), y el tipo de datos float128 definido en la biblioteca Boost de C++.

El tipo float128 garantiza de 34 a 35 dígitos decimales significativos exactos en la representación de números reales, en contraste con el tipo double que solo garantiza de 15 a 16.

La combinación de la aritmética de alta precisión del tipo float 128 y del esquema RK853 fueron suficientes para obtener resultados con al menos 16 cifras significativas exactas, lo que desde el punto de vista numérico puede considerarse exacto si se trabaja con el tipo de datos double.

Para la comparación se tomaron 50 puntos de entrada en la cara anterior del cristalino, comenzando en $w = 0$ y terminando en $w = 3$ con paso uniforme, solo se consideraron valores positivos de w por la simetría a radial del GRIN. Tanto para w_f como para m_f se obtuvieron el número de evaluaciones necesarias para obtener errores absolutos menores o iguales que: 10^{-2} ; 10^{-3} ; ...; 10^{-14} .

En las siguientes tablas se muestran los valores usados para los parámetros del GRIN y las superficies del cristalino, dichos valores fueron tomados de Muñoz-Villaescusa, Nuñez-Chongo y Batista Leyva (2014). Como índice de refracción para el medio que rodea el cristalino se tomó el del agua: 1.3330, muy similar al de los medios reales.

Tabla 5.1

Parámetros del GRIN

d	n_N	n_{a1}	n_{p1}	n_0
1:59	1:407	0:015427	0:006605	0:001978

Tabla 5.2*Parámetros de la superficie del cristalino*

Superficie	Esfericidad (Q)	Radio (R)	Posición
Anterior	-0.94	12.4	0.0
Posterior	0.96	-8.1	4.02

Las figuras 5.1 y 5.2 muestran la relación entre error absoluto y número de evaluaciones necesarias para el cálculo del punto de salida w_f y la pendiente m_f con los métodos: R-RK4, F-RK4, R-RK45 y F-RK45.

Como se aprecia, usando el esquema numérico RK4 el número de evaluaciones crece bruscamente cuando se exige un error muy pequeño, aunque para valores del error mayores que 10^{-7} la cantidad de evaluaciones es menor que las requeridas por RK45.

Este comportamiento se explica porque para errores grandes tiene un mayor peso en el total de evaluaciones las seis necesarias por iteración en RK45 en comparación con las solo cuatro necesarias en RK4. Sin embargo, cuando se exige un error muy pequeño la selección adaptativa del paso compensa esta diferencia disminuyendo la cantidad de iteraciones necesarias en RK45 en comparación con RK4.

De las gráficas 5.1 y 5.2 es evidente que el esquema numérico RK45 es más conveniente para el cálculo de la trayectoria sobre todo cuando se requieran soluciones lo más exactas posible. En cuanto a que ecuación es la más conveniente, en las gráficas se aprecia que los métodos basados en la resolución de la ecuación derivada del principio de Fermat F-RK45 y F-RK4 necesitan menos evaluaciones que los correspondientes métodos basados en la ecuación del rayo R-RK45 y R-RK4.

No obstante, teniendo en cuenta que la diferencia no es notable y que son ecuaciones distintas se realizó una comparación adicional considerando el tiempo de ejecución.

En la figura 5.3 se muestra la comparación correspondiente a los métodos F-RK45 y R-RK45 (solo es necesario comparar usando el esquema más eficiente). La grafica 5.3 se obtuvo promediando el tiempo de ejecución de los 50 trazos para cada uno de los errores absolutos, para esto se empleó una maquina con procesador Intel(R) Celeron(R) CPU E3400 a 2.60 GHz y 2 GB de RAM.

Figura 5.1

Error absoluto contra número de evaluaciones en el cálculo del punto de salida w_f .

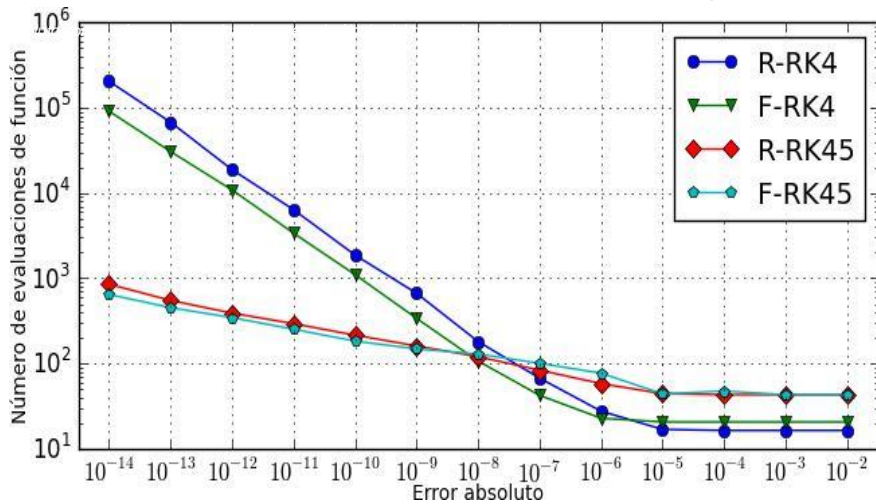


Figura 5.2

Error absoluto contra número de evaluaciones en el cálculo de la pendiente de salida m_f .

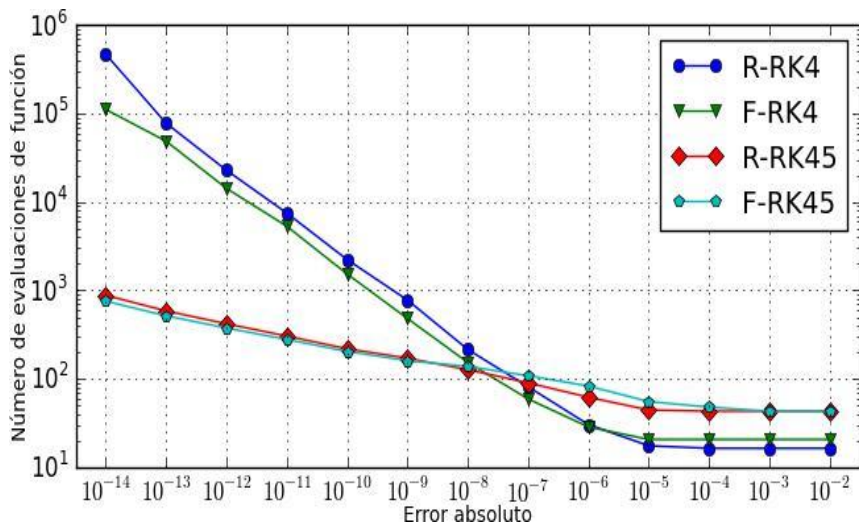
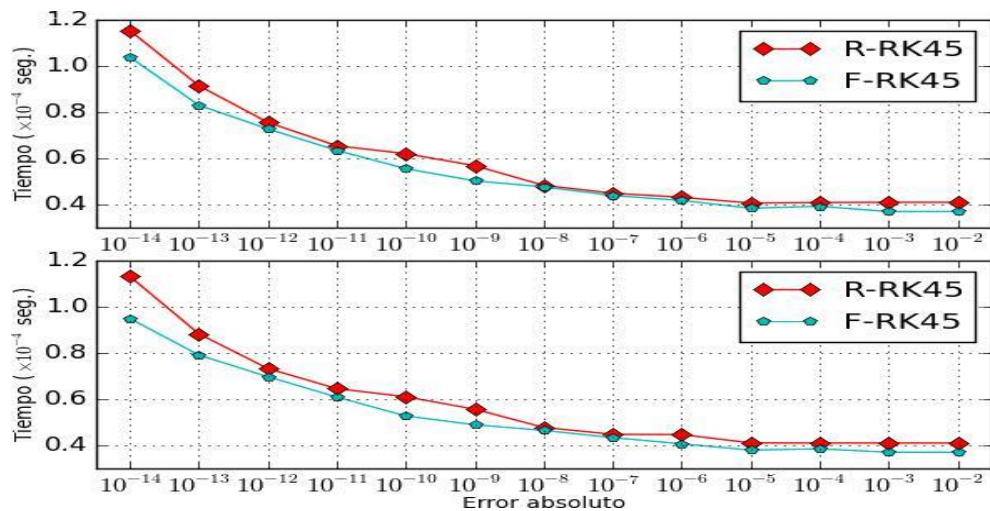


Figura 5.3

Error absoluto contra tiempo de ejecución en el cálculo del punto de salida w_f (superior) y la pendiente de salida m_f (inferior).



De acuerdo a la gráfica 5.3 el método F-RK45 es ligeramente más eficiente que R-RK45, por lo que se usará para el cálculo del trazado de rayos. De cierta manera, que el esquema RK45 sea más eficiente que RK4 es un resultado esperado, pues los métodos de paso adaptativo se crearon precisamente para aumentar la eficiencia en comparación con los de paso fijo.

Por otra parte, lo más notorio es que la ecuación derivada del principio de Fermat (2.18) sea más conveniente que la clásica ecuación del rayo (1.6). Aunque la diferencia no es muy marcada, hay que destacar que el método F-RK45 requiere aproximadamente la mitad de la memoria que R-RK45, pues en el primero se trabaja con solo dos ecuaciones (2.19-2.20) mientras que en el segundo con cuatro (2.25-2.28).

Por otra parte, la pequeña diferencia puede llegar a ser notable cuando se resuelva el problema de optimización (2.2), para lo cual se necesita trazar miles de rayos.

5.2 Sensibilidad de la función de mérito a los parámetros del GRIN

Para evaluar la sensibilidad de la función de mérito (2.3) a la variación de los parámetros del GRIN se calcularon 100 trayectorias tomando w_0 uniformemente

desde -3 hasta 3. Los parámetros del GRIN y de las superficies del cristalino son los especificados en las tablas 5.1 y 5.2.

Una vez definida la función de mérito según (2.3) se varió cada uno de los parámetros del GRIN de manera independiente y se graficó la correspondiente respuesta de la función de mérito. La gráfica 5.4 muestra los resultados obtenidos variando cada uno de los parámetros del GRIN en un 25 por ciento, es decir, cada parámetro de la tabla 5.1 se varió en el intervalo $[x_0 - 0.25x_0; x_0 + 0.25x_0]$ manteniendo el resto constantes (aquí x_0 se sustituye por los valores de $n_N; n_{a1}; n_{p1}; n_0$ o d según la tabla 5.1).

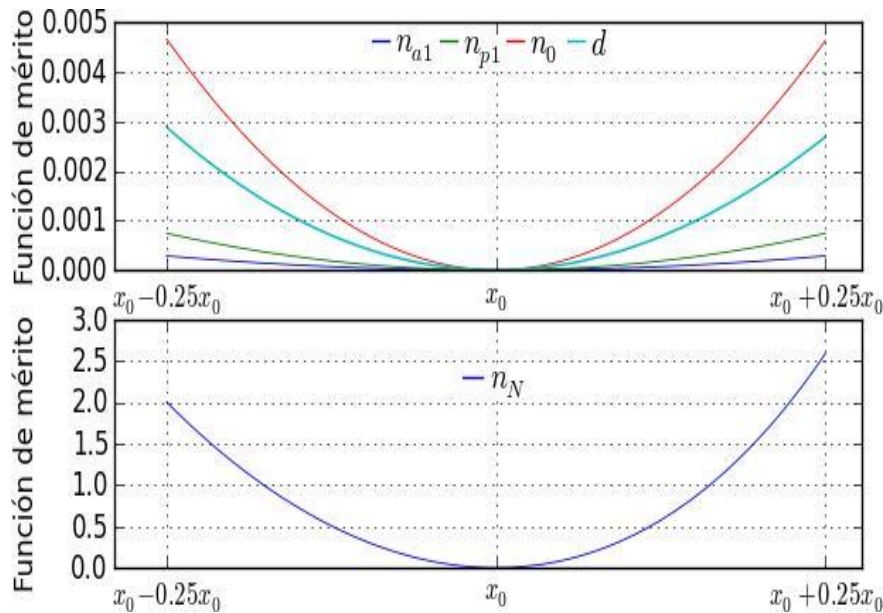
En la figura 5.4, el parámetro n_N (índice de refracción en el núcleo) es el de mayor peso en la función de mérito. Note que variar n_N provoca un cambio en la función de mérito mucho mayor que los demás parámetros (aproximadamente 10^3 veces mayor), esto puede traer consigo que n_N tenga una importancia en el proceso de optimización desproporcionada con respecto a los otros parámetros del GRIN. Afortunadamente el índice de refracción en el núcleo ha sido bien estudiado por lo que es posible acotar los valores de n_N a un rango fisiológicamente correcto.

En la gráfica superior de la figura 5.4 no existe gran diferencia entre $n_{a1}; n_{p1}; n_0$ y d , sin embargo, n_0 tiene el mayor peso. Esto se explica porque la luz al moverse en un medio de GRIN tiende a curvarse hacia la dirección del gradiente de índice de refracción y es precisamente n_0 el parámetro que determina la dirección radial de dicho gradiente.

Como en nuestro caso la luz se mueve predominantemente en la dirección axial, es lógico que la componente radial del gradiente sea la que más influya sobre la desviación del rayo.

Figura 5.4

Variación de la función de mérito $G(c_1; c_2; \dots; c_m)$ con respecto a los parámetros del GRIN.



Obviamente las gráficas de la figura 5.4 no caracterizan el comportamiento de la función de mérito para todos los valores posibles de los parámetros del GRIN, no obstante, brindan una idea general de su sensibilidad a dichos parámetros. Para otras cantidades de trazos y otros valores de los parámetros del GRIN (que se generaron aleatoriamente, pero manteniendo la coherencia física del problema) se obtuvieron resultados similares a los presentados anteriormente.

5.3 Evaluación del método para la reconstrucción del GRIN

Para evaluar el desempeño del método obtenido se realizaron una serie de experimentos numéricos con datos simulados. Con el fin de determinar la influencia del número de mediciones en la construcción del GRIN, se realizaron pruebas variando esta cantidad. También se realizaron pruebas añadiendo un error gaussiano a los datos de entrada (punto y dirección de salida del rayo de luz).

Se escogieron dos métodos para realizar la minimización de la función de mérito. El primero es el método SIMPLEX (función `scipy.optimize.fmin()`), este tiene la ventaja de necesitar solamente evaluaciones de función y en su contra el ser

relativamente lento comparado con métodos que usan la información del gradiente (Nelder & Mead, 1965).

El segundo algoritmo es el de quasi-Newton BFGS (Nocedal & Wright, 2006) (función `scipy.optimize.fmin_bfgs()`), que a diferencia del método SIMPLEX, en este caso es necesario suministrar una forma de evaluar el gradiente de la función de mérito. Como no se cuenta con una expresión analítica del gradiente, este es aproximado a través de diferencias finitas.

Debido a que el resultado final es la reconstrucción del GRIN en cristalinios humanos es necesario limitar los valores permisibles de los parámetros para impedir que se obtengan resultados alejados de la realidad o físicamente incorrectos, como por ejemplo valores del índice de refracción menores que 1. La tabla 5.3 muestra las restricciones tipo caja usadas para cada uno de los parámetros.

Según Bass (2010), el índice de refracción en el núcleo varía entre 1.39 y 1.41, en nuestro caso se escogió un rango más amplio empezando 1.38 y terminando en 1.42. Para d se tuvo en cuenta que según estudios realizados con MRI, su valor es aproximadamente 41% de la longitud axial del cristalino, lo que en este caso sería aproximadamente 1.648, así que se escogió el intervalo [1.0; 2.0] (Jones, Atchison, Meder, & Pope, 2005).

Para n_{a1} y n_{p1} se tuvo en cuenta que deben ser menores que 0 y que los valores del índice de refracción no pueden ser menores que 1 en los puntos (0; 0) (superficie anterior), (4.02; 0) (superficie posterior). La misma idea se aplicó para n_0 para garantizar valores del índice mayores que 1 en los puntos (d ; -3) y (d ; +3).

En realidad, las restricciones en n_{a1} ; n_{p1} y n_0 no garantizan que el índice de refracción sea mayor que 1 en todos los puntos de cristalino, sin embargo, son una primera aproximación para acotar el espacio de búsqueda. Note, además,

que según los valores de n_{a1} , n_{p1} y n_0 dados en la tabla 5.1, los respectivos intervalos de la tabla 5.3 pudieran reducirse aún más.

Tabla 5.3

Restricciones de caja para los parámetros del GRIN

d	n_N	n_{a1}	n_{p1}	n_0
[1; 2] [1.38; 1.42] [0.38; 0.0] [0.09; 0.0] [0.42; 0.0]				

En la realización de los experimentos numéricos se pudo comprobar que la función de mérito (2.3) tiene varios mínimos locales que en general están muy cercanos entre sí. Esta situación complejiza la búsqueda de un mínimo global y por ende la reconstrucción del GRIN.

Para dar solución a este problema se decidió combinar el algoritmo de búsqueda global BASIN- HOPPING (función `scipy.optimize.Basinhopping()`) con los de búsqueda local SIMPLEX y BFGS. El algoritmo BASIN- HOPPING no garantiza que se encuentre el mínimo global, pero los resultados son mucho mejores que cuando solo se usan los métodos de búsqueda local (Wales & Scheraga, 1999; Wales, 2003).

Para evaluar la exactitud de la reconstrucción del GRIN, se calculó el máximo valor absoluto de la diferencia entre el GRIN nominal (definido por los valores de la tabla 5.1) y el GRIN reconstruido. Las diferencias se calcularon sobre una rejilla regular (con paso 10^{-2}) de puntos dentro del cristalino. Se tomaron los puntos contenidos entre las caras del cristalino y entre $w = 3$ y $w = 3$, para un total de 19532 puntos.

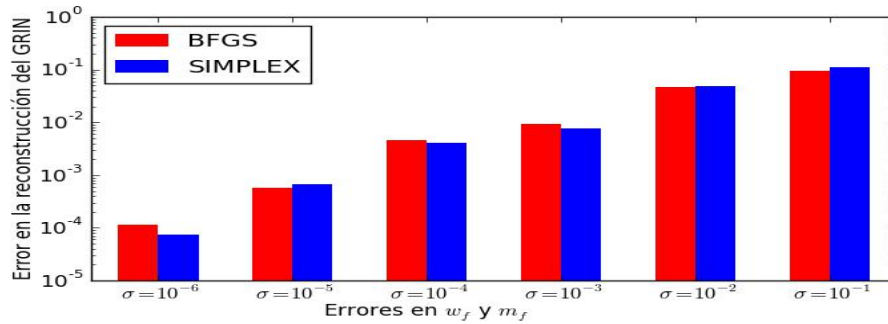
5.3.1 Exactitud en la reconstrucción del GRIN

En la figura 5.5 se muestra los errores en la reconstrucción del GRIN en función del error en las mediciones del punto y la dirección de salida del rayo. Nuevamente se simularon 100 trazos y tanto a los valores de w_f como a m_f se les añadió un error gaussiano con desviación estándar (σ) igual a:

10^{-1} ; 10^{-2} ; 10^{-3} ; 10^{-4} ; 10^{-5} y 10^{-6} para cubrir desde errores muy grandes a muy pequeños. Para cada error se realizaron un total de 50 reconstrucciones del GRIN.

Figura 5.5

Error en la reconstrucción del GRIN.



Como es de esperar, el error en la reconstrucción del GRIN decrece a medida que disminuyen los errores en los datos de entrada. También es apreciable que los resultados no difieren de manera significativa al usar el método SIMPLEX o BFGS, aun cuando en este último el gradiente es aproximado por diferencias finitas. Se observó además que usando BFGS el tiempo necesario para obtener la reconstrucción del GRIN es mucho menor que cuando se usa SIMPLEX.

Para un error en los datos de entrada con desviación estándar $\sigma = 10^{-3}$, se obtienen errores en la reconstrucción del GRIN menores a 10^{-2} , por lo tanto, es recomendable que en la realización de experimentos reales se tome $\sigma = 10^{-3}$ como mayor error permisible para los valores de w_f y m_f .

En la figura 5.6 se han representado las diferencias entre el GRIN nominal y el reconstruido en cada punto de la rejilla, para cada error se escogió la mejor de las 50 reconstrucciones. Las escalas de colores se omitieron pues solo interesa mostrar cómo se distribuye el error en el área del cristalino y no su valor, pues ya está representado en la figura 5.5 (en la figura 5.6 el color rojo corresponde a los mayores errores y el azul a los menores).

Para todos los casos el mayor error en la reconstrucción del cristalino se encuentra en las zonas cercanas a las superficies. Esto es un resultado conveniente ya que en la práctica es muy difícil hacer estimaciones del índice de

refracción en el interior del cristalino, mientras que para las superficies es posible hacer mediciones directas con refractómetros de Abbe (Huggert, 1948; Weale, 1963).

Conocer la magnitud del error en la reconstrucción del GRIN todavía no es suficiente para determinar la utilidad del método obtenido, es necesario verificar que el GRIN reconstruido puede ser incluido en el modelo óptico del ojo humano (Muñoz-Villaescusa, Nuñez-Chongo, & Batista Leyva, 2014).

Téngase en cuenta que en el modelo del ojo los rayos que entran al cristalino luego de atravesar la córnea en general no lo hacen paralelos al eje óptico (ver figura 5.7) y la reconstrucción del GRIN solo se basa en el trazado de rayos que si lo hacen. Para obtener el error que se comete al sustituir el GRIN nominal por el reconstruido, se calculó el valor absoluto promedio de la diferencia entre el valor del intercepto en el eje óptico (Z_{final} en la figura 5.7) obtenido usando el GRIN nominal y el obtenido usando el reconstruido. Para construir la gráfica 5.8 se realizaron 100 trazos con paso uniforme desde $w = -3$ hasta $w = 3$, pero esta vez empezando desde la córnea. Para obtener el punto y la pendiente de entrada en el cristalino se siguió el procedimiento descrito en Muñoz-Villaescusa, Nuñez-Chongo y Batista Leyva (2014).

Figura 5.6

Distribución espacial del error en la reconstrucción del GRIN.

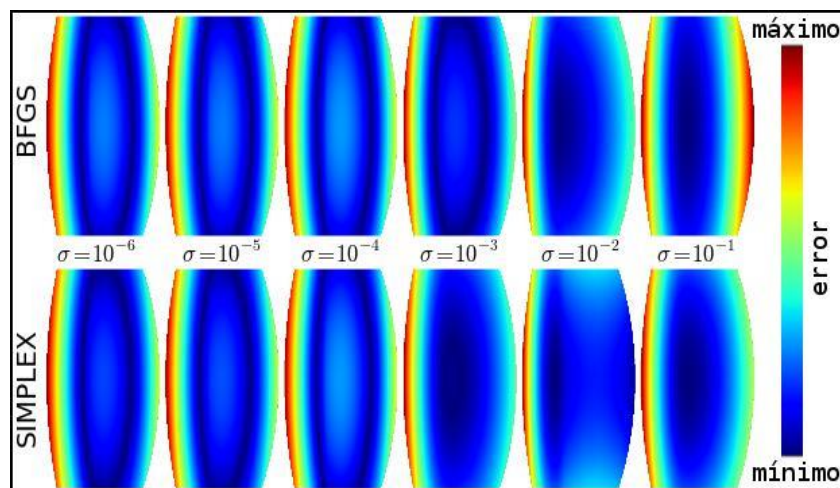


Figura 5.7

Modelo óptico del ojo

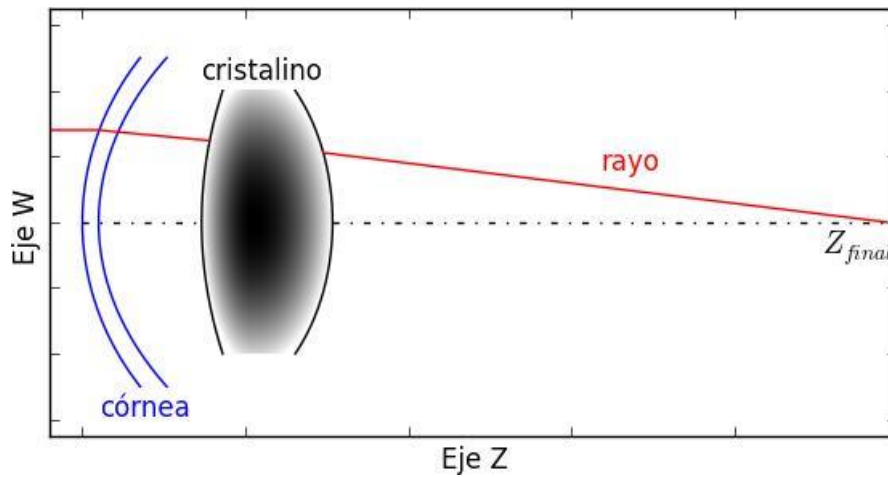
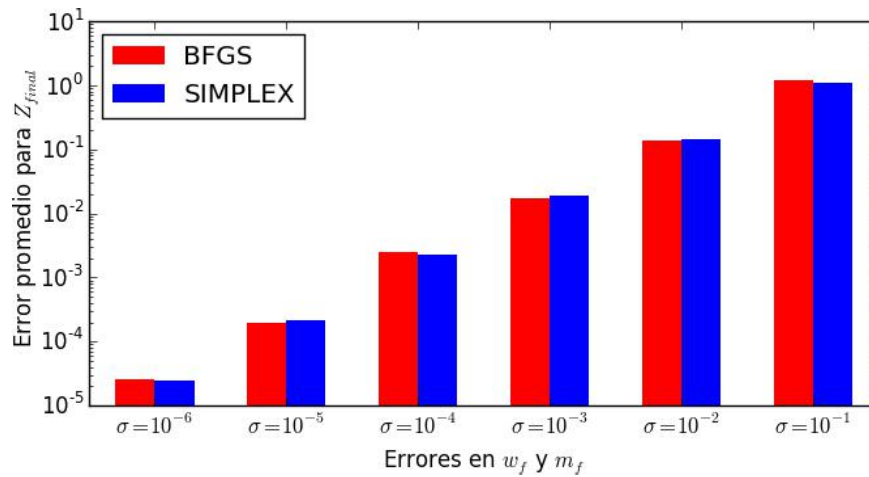


Figura 5.8

Error en el cálculo de Z_{final} .



Los resultados mostrados en la figura 5.8 evidencian que hay una relación directa entre el error en la reconstrucción del GRIN y el que se comete al sustituirlo en el modelo óptico del ojo, lo que demuestra que es factible usar el GRIN reconstruido en el modelo del ojo, aunque para $\sigma = 10^{-1}$ y $\sigma = 10^{-2}$ estos errores pueden ser demasiado grandes.

5.3.2 Influencia del número de trazos en la reconstrucción del GRIN

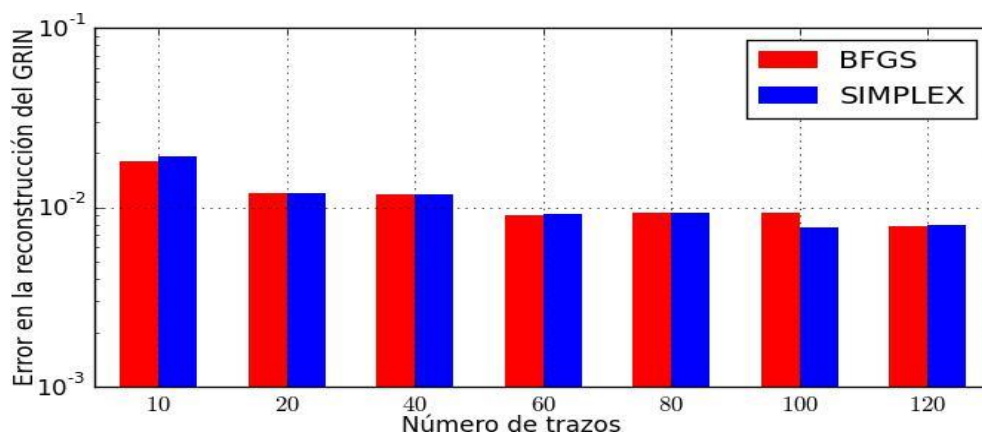
Algunos experimentos numéricos fueron realizados variando la cantidad de rayos usados para definir la función de mérito (2.3). La figura 5.9 muestra el error en la reconstrucción del GRIN en función del número de trazos (número de mediciones de w_f y m_f) para un error de $\sigma = 10^{-3}$.

Como se muestra en la figura 5.9, a partir de 60 la cantidad de trazos a usar no influye significativamente en la exactitud con que se reconstruye el GRIN. Sin embargo, se observó que con el aumento del número de rayos el algoritmo BASIN-HOPPING necesita menos iteraciones para obtener los mismos resultados.

Esto quiere decir que a medida que se aumenta el número de trazos, la combinación óptima de parámetros del GRIN queda mejor determinada.

Figura 5.9

Influencia del número de trazos en la reconstrucción del GRIN.



La principal conclusión aquí, es que en el caso de contar con pocas mediciones experimentales se deben realizar muchas iteraciones del método BASIN-HOPPING, para obtener resultados similares a los que se obtendrían con muchas mediciones.

Otro resultado importante, es que el aumento en el tiempo de ejecución que supone trabajar con un número de rayos muy grande, puede ser compensado al necesitar menos iteraciones para el algoritmo de búsqueda global.

CONCLUSIONES

El estudio teórico realizado para la fundamentación de la investigación y los resultados experimentales obtenidos, nos permiten arribar a las siguientes conclusiones:

- El método para el cálculo del trazado de rayos a través del cristalino F-RK45 (ecuación derivada del principio de Fermat con esquema de integración RK45) resultó ser el más eficiente GRIN. Por lo tanto, puede ser usado como parte del método de reconstrucción del GRIN.
- Se implementó el método para la reconstrucción del GRIN en cristalinos de manera satisfactoria. Aunque los experimentos numéricos se realizaron para el modelo de GRIN bipolarabólico, el método puede ser usado para cualquier otro modelo.
- La existencia de varios mínimos locales de la función de mérito, hace necesario el uso combinado de un algoritmo de búsqueda global con uno de búsqueda local.
- Los resultados obtenidos con los algoritmos SIMPLEX y BGFS son similares, no obstante, es recomendable el método BFGS por ser más eficiente.
- Para errores en los valores del punto y la dirección de salida del rayo lo suficientemente pequeños (con desviación estándar menor que 10^{-3}) el GRIN puede ser reconstruido con gran exactitud.
- Se pudo determinar que con 60 trazos es suficiente para realizar la reconstrucción del GRIN con buena exactitud. Además, el aumento de la cantidad de trazos hace posible que sean necesarias menos iteraciones para la búsqueda del mínimo global.

RECOMENDACIONES

Con el fin de dar continuidad al trabajo realizado, se hacen las siguientes recomendaciones:

- Hacer los cambios necesarios para que el método pueda responder a experimentos más complejos, donde los rayos de luz en general no entren al cristalino paralelos al eje óptico.
- Extender el estudio a otros modelos de GRIN existentes. En particular a modelos polinomiales de mayor orden que el bipolarabólico.
- Realizar el estudio para direcciones de salidas del rayo con una desviación estándar mayor o igual a 10^{-3} para determinar la exactitud de reconstrucción del GRIN.
- Plantear el estudio con una menor cantidad de trazos se puede obtener una buena reconstrucción del GRIN.

BIBLIOGRAFÍA

- Aravena, M., Caamaño, C., & Giménez, J. (2008). Modelos matemáticos a través de proyectos. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*. Obtenido de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362008000100003&lng
- Argento, e. a. (2008). Oftalmología general: introducción para el especialista. *CORPUS*.
- Atchison, D. A., & Smith, G. (1995). *Continuous Gradient Index and Shell Models of Human Lens*. Vision Research.
- Bass, M. (2010). *Handbook of optics*. . Vision and Vision Optics.
- Benjamin, H. (1980). *Recupera la visión sin gafas (Vol. 1)*. Madrid: Madrid, Jorge Juan, España: Gráficas Cofás, S.A.
- Blaker, J. W. (1980). Toward an adaptive model of the human eye. *Journal of the Optical Society of America* 70(2), 220-223.
- Born, M., & Wolf, E. (1999). Principles of Optics I, 7th ed. *Cambridge University Press*.
- Boyd, B. (2010). *elibraryweb*. Obtenido de Recuperado de: <http://www.elibraryweb.net/books/Catarata%20Espanol.pdf>
- Brown, N. P. (1974). *The change in lens curvature with age*. . Eye Research.
- Campistrous, L. e. (1998). Indicadores e investigación educativa. . *Soporte digital*.
- Constitución de la República del Ecuador. (2008). Obtenido de <https://www.cosede.gob.ec>
- Cruz-Rodríguez, R. C., Batista-Planas, A. L., Nuñez-Chongo, O., Muñoz-Villaescusa, C., & Batista-Leyva, A. J. (2015). Ray paths through a GRIN lens: the crystalline case. . *Rev. Cub. F s.* , 32, 96.
- Curbelo Cunill, L. e. (2007). Resultados de la cirugía de cataratas por la técnica de facoemulsificación con quick chop. *Scielo*. Obtenido de Recuperado de: http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0864-21762007000200002&lng=es
- De Castro, A., Barbero, S., Ortiz, S., & Marcos, S. (2011). Accuracy of the reconstruction of the crystalline lens gradient index with optimization methods from ray tracing and Optical Coherence Tomography data. . *Optics Express* 19:19265-19279.

- De Castro, A., Birkenfeld, J., Maceo, B., Manns, F., Arrieta, E., Parel, J. M., & Marcos, S. (2013). Influence of Shape and Gradient Refractive Index in the Accommodative Changes of Spherical Aberration in Nonhuman Primate Crystalline Lenses. *Investigative Ophthalmology and Visual Science*.
- De Castro, A., Ortiz, S., Gamba, E., Siedlecki, D., & Marcos, S. (2010). Three-dimensional reconstruction of the crystalline lens gradient index distribution from oct imaging. *Optics Express* 18:21905-21917.
- De Castro, A., Siedlecki, D., Borja, D., Uhlhorn, S., Parel, J. M., Manns, F., & Marcos, S. (2011). Age-dependent variation of the Gradient Index profile in human crystalline lenses. *Journal of Modern Optics* 58:1781.
- Díaz, J. A., Pizarro, C., & Arasa, J. (2008). Single dispersive gradient-index profile for the aging human lens. *Journal of the Optical Society of America A* 25(1), 250-261.
- Dormand, J. R., & Prince, P. J. (1980). A Family of Embedded Runge-Kutta Formulae. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 6, 19-26.
- Dormand, J. R., & Prince, P. J. (1986). *Computers and Mathematics with Applications*, 12A.
- Fehlberg, E. (1969). *Low-order classical Runge-Kutta formulas with step size control and their application to some heat transfer problems*. NASA Technical Report 315.
- Garner, L. F., Smith, G., Yao, S., & Augusteyn, R. C. (2001). Gradient refractive index of the crystalline lens of the Black Oreo Dory (*Allocyttus Niger*): comparison of magnetic resonance imaging (MRI) and laser ray-trace methods. *Vision Research* 41, 973-979.
- Graue Wiechers, E. (2014). Oftalmología en la práctica de la medicina general. *Universidad Nacional Autónoma de México.*, 4.
- Gullstrand, A. (1924). *Handbuch der Physiologischen Optik*. J. P. Southall trans. Optical Society of America.
- Huggert, A. (1948). *The iso-indicial surfaces of the human crystalline lens*. Stockholm: Acta Ophthalmologica supplementum .
- Jones, C. E., & Pope, J. M. (2004). Measuring optical properties of an eye lens using magnetic resonance imaging. *Magnetic Resonance Imaging* 22 , 211-220.
- Jones, C. E., Atchinson, D. A., & Pope, J. M. (2007). Changes in Lens Dimensions and Refractive Index with Age and Accommodation. *Optometry and Vision Science*(1040-5488/07/8410-0990/0 84,10,990-995).

- Jones, C. E., Atchison, D. A., Meder, R., & Pope, J. M. (2005). Refractive index distribution and optical properties of the isolated human lens measured using magnetic resonance imaging (MRI). . *Vision Research*, 2352-2366.
- Kasthurirangan, S., Markwell, E. L., Atchison, D. A., & Pope, J. M. (2008). *In vivo study of changes in refractive index distribution in the human crystalline lens with age and accommodation*. *Investigative Ophthalmology and Visual Science* 49(6).
- Koretz, J. F., Cook, C. A., & Kaufman, P. L. (2001). Aging of the human lens: Changes in lens shape at zero-diopter accommodation. *Journal of the Optical Society of America A. Optics and Image Science*, 18(2), 265-272.
- Li, Z., & Scheraga, H. A. (1987). *Monte Carlo-minimization approach to the multiple-minima problem in protein folding*. United States: Proc. Natl. Acad. Sci. .
- Liou, H. L., & Brennan, N. A. (1997). Anatomically accurate, nite model eye for optical modeling. . *Journal of the Optical Society of America A* 14(8),, 1684-1695.
- Manns, F., Ho, A., Borja, D., & Parel, J. M. (2010). Comparison of Uniform and Gradient Paraxial Models of the Crystalline Lens. . *Investigative Ophthalmology and Visual Science.*, 51, 789.
- Marchand, E. W. (1978). *Gradient Index Optics*. Academic Press.
- Montesinos-López, O. A., & Hernández-Suárez, C. M. (2007). Modelos matemáticos para enfermedades infecciosas. . *Scielo*, 218-226. Obtenido de <http://www.scielo.org.mx/pdf/spm/v49n3/07.pdf>
- Muñoz-Villaescusa, C., Nuñez-Chongo, O., & Batista Leyva, A. J. (2014). Optical model of the unaccommodated human eye. . *Rev. Cub. F s.* , 31, 35.
- Nelder, J. A., & Mead, R. (1965). A simplex method for function minimization. *The Computer Journal*, 7, 308-313.
- Nishidate, Y., Nagata, T., Morita, S., & Yamagata, Y. (2011). *Ray-tracing method for isotropic inhomogeneous refraction index media from arbitrary discrete input*. . *Applied Optics* 50(26).
- Nocedal, J., & Wright, S. J. (2006). *Numerical Optimization, second edition*. World Scientific.
- Oñate, N. e. (1988). *Utilización del método Delphi en la Pronosticación. Una experiencia inicial*. . La Habana: Economía Planificada No 4.
- Organización Mundial de la Salud. (2020). *Informe mundial sobre la visión ISBN 978-92-4-000034-6*.

- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., & Flannery, B. P. (2007). Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing. *Cambridge University Press*.
- Puchalski, J. (1992). Numerical determination of ray tracing: a new method. *Applied Optics* 31, .
- Rama, M. A., Pérez, M., Bao, C., Flores Arias, M. T., & Reino, C. G. (2005). *Gradient-index crystalline lens model: A new method for determining the paraxial properties by the axial and eld rays*. *Optics Communications*.
- Ramos, A., Sánchez, P., Ferrer, J. M., Barquín, J., & Linares, P. (2010). *Modelos matemáticos de optimización*. Obtenido de https://d1wqtxts1xzle7.cloudfront.net/34357606/modelado_en_gams-with-cover-page-v2.pdf
- Riordan-Eva, P., & Whitcher, J. P. (2009). *Oftalmología general de Vaughan y Asbury*. McGRAW-HILL.
- Rodríguez-Velázquez, J. A., & Steegmann-Pascual, C. (2013). Modelo Matemáticos. Obtenido de https://recursos.salonesvirtuales.com/wp-content/uploads/bloques/2012/08/Modelos_matematicos.pdf
- Shampine, L. F. (1986). *Some Practical Runge-Kutta Formulas*. *Mathematics of Computation*.
- Sharma, A., & Ghatak, A. K. (1986). Ray tracing in gradient-index lenses: computation of ray-surface intersection. . *Applied Optics* 25.
- Sharma, A., Kumar, D. V., & Ghatak, A. K. (1982). Tracing rays through graded-index media: a new method. . *Applied Optics* 21.
- Smith, G., Atchison, D. A., & Pierscionek, B. K. (1992). Modeling the power of the aging human eye. . *Journal of the Optical Society of America A* 9(12), , 2111-2117.
- Smith, G., Atchison, D. A., Iskander, D. R., Jones, C. E., & Pope, J. M. (2009). Mathematical models for describing the shape of the in vitro unstretched human crystalline lens. . *Vision Research* 49 , 2442-2452.
- Smith, G., Pierscionek, B. K., & Atchison, D. A. (1991). The optical modelling of the human lens. . *Ophthalmic and Physiological Optics* 11(4), 359-369.
- Stone, B. D., & Forbes, G. W. (1990). *Optimal interpolants for Runge-Kutta ray tracing in inhomogeneous media*. *Journal of the Optical Society of America*.
- Wales, D. J. (2003). *Energy Landscapes*. Cambridge University Press.

Wales, D. J., & Doye, J. (1997). *Global Optimization by Basin-Hopping and the Lowest Energy Structures of Lennard-Jones Clusters Containing up to 110 Atoms*. . Journal of Physical Chemistry.

Wales, D. J., & Scheraga, H. A. (1999). *Global optimization of clusters, crystals, and biomolecules*. . Science.

Weale, R. (1963). *The ageing eye in The Lens*. London: H. K. Lewis.

ANEXO A

Encuesta para determinar el coeficiente de conocimiento de los expertos.

Objetivo: Determinar el nivel real de competencia en la temática objeto de estudio de los posibles expertos.

Usted fue seleccionado como posible experto, teniendo en cuenta su aval y experiencia en el campo objeto de estudio. Se le solicita que responda las siguientes interrogantes con el objetivo de poder llevar feliz término la investigación. Se le agradece de antemano su cooperación. Muchas gracias.

Temática que se investiga: Método para la reconstrucción del GRIN en cristalinicos.

Nombre y apellidos: Centro de trabajo: Grado científico:

Categoría docente:

Años de experiencia docente:

1. Se le solicita que usted valore su nivel de competencia sobre la problemática que se investiga, marcando con una cruz el valor que considere en una escala de 1 al 10 (la máxima competencia se corresponde con el #10).

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

2. En la siguiente tabla, le proponemos que indique con una cruz en cada fila, el grado de influencia (alto, medio, o bajo) que tienen en sus criterios cada fuente de argumentación y marque con una X la que considere que más influido.

Fuentes de argumentación	Grado de influencia		
	Alto	Medio	Bajo
1. Análisis teórico realizado por usted.			
2. Su propia experiencia			
3. Trabajos de autores nacionales			
4. Trabajos de autores extranjeros			
5. Su propio conocimiento del problema.			

ANEXO B

Tabla para determinar las fuentes de argumentación y su grado de influencia

Fuentes de argumentación	Grado de influencia		
	Alto	Medio	Bajo
1. Análisis teóricos sobre el tema.	0.3	0.2	0.1
2. Experiencia.	0.5	0.4	0.2
3. Fuentes nacionales consultadas.	0.05	0.05	0.05
4. Fuentes extranjeras consultadas.	0.05	0.05	0.05
5. Conocimiento del problema.	0.05	0.05	0.05
6. Intuición	0.05	0.05	0.05
Totales	1.0	0.8	0.5

Tabla : Para determinar el coeficiente de argumentación K_a .

ANEXO C

Tabla para la determinación del coeficiente autovalorativo K para la selección de expertos.

Experto	Coeficiente de conocimiento k_c	Coeficiente de argumentación k_a	Coeficiente autovalorativo k	Nivel
1	0,8	0,9	0,85	alto
2	0,8	0,9	0,85	alto
3	0,8	1	0,90	alto
4	0,8	0,9	0,85	alto
5	0,8	1	0,90	alto
6	0,8	0,9	0,85	alto
7	0,8	0,9	0,85	alto
8	0,4	0,5	0,45	bajo
9	0,4	0,5	0,45	bajo
10	0,6	1	0,80	alto
11	0,6	1	0,80	alto
12	0,8	1	0,90	alto
13	0,2	0,7	0,45	bajo
14	1	1	1	alto
15	1	1	1	alto
16	1	1	1	alto
17	1	1	1	alto
18	0,2	0,7	0,45	bajo
19	1	1	1	alto
20	1	1	1	alto
21	1	1	1	alto
22	0,6	1	0,80	alto
23	1	1	1	alto
24	1	1	1	alto
25	0,6	0,8	0,70	medio
26	1	0,9	0,95	alto
27	1	0,9	0,95	alto
28	1	1	1	alto
29	0,2	0,8	0,50	medio
30	0,6	1	0,80	alto
31	0,2	0,8	0,50	medio
32	1	0,9	0,95	alto
33	0,2	0,4	0,30	bajo
34	0,2	0,4	0,30	bajo
35	0,6	1	0,80	alto
36	0,6	0,9	0,75	medio

ANEXO D

Tabla Coeficiente de competencia de los expertos seleccionados.

Promedio de competencia: 0,83 alto

Experto	Coeficiente de conocimiento kc	Coeficiente de argumentación ka	Coeficiente autovalorativo k	Nivel
1	0,8	0,9	0,85	alto
2	0,8	0,9	0,85	alto
3	0,8	1	0,90	alto
4	0,8	0,9	0,85	alto
5	0,8	1	0,90	alto
6	0,8	0,9	0,85	alto
7	0,8	0,9	0,85	alto
8	0,6	1	0,80	alto
9	0,6	1	0,80	alto
10	0,8	1	0,90	alto
11	1	1	1	alto
12	1	1	1	alto
13	1	1	1	alto
14	1	1	1	alto
15	1	1	1	alto
16	1	1	1	alto
17	1	1	1	alto
18	0,6	1	0,80	alto
19	1	1	1	alto
20	1	1	1	alto
21	0,6	0,8	0,70	medio
22	1	0,9	0,95	alto
23	1	0,9	0,95	alto
24	1	1	1	alto
25	0,2	0,8	0,50	medio
26	0,6	1	0,80	alto
27	0,2	0,8	0,50	medio
28	1	0,9	0,95	alto
29	0,6	1	0,80	alto
30	0,6	0,9	0,75	medio

ANEXO E

Encuesta a expertos

Objetivo: Valorar por parte de los expertos la factibilidad de la propuesta de un método para la obtención de los parámetros que caracterizan la distribución de índices de refracción (GRIN) en cristalinos humanos, a partir de mediciones de la trayectoria de un rayo de luz antes y después de atravesar el cristalino. Para evaluar el método se utilizó como caso de estudio un modelo de GRIN bipolar. Estimado(a) colega, se está llevando a cabo una investigación con el objetivo de ofrecer una solución basada en un modelo de Runge-Kutta para determinar la incidencia que tiene el trayecto de la luz a través del cristalino.

Se necesita que aporte su criterio, luego de consultar dicha propuesta, referente a las cuestiones que seguidamente se le expone teniendo en cuenta la siguiente escala valorativa:

Categorías para la evaluación

Criterios	Categorías	Puntuación para la evaluación
Muy adecuada	C1	5
Adecuado	C2	4
Poco adecuado	C3	3
Inadecuado	C4	2
Sin opinión	C5	1

Para elaborar la propuesta de solución se tuvo en cuenta una estructura, la cual solicitamos que valore a partir de los indicadores que a continuación se le brinda:

Tabla: Valorar por parte de los expertos la propuesta de solución a partir de los indicadores siguientes:

Indicadores	Categorías				
	C1	C2	C3	C4	C5
Contribución de los parámetros que caracterizan el GRIN del cristalino como un problema de optimización (I ₁).					
Pertinencia del problema matemático que supone la reconstrucción del GRIN en cristalinos a partir del trazado de rayos (I ₂).					
Posibilidades de los métodos de Runge-Kutta con paso adaptativo utilizando las llamadas fórmulas de integración embebidas para obtener las aproximaciones (I ₃).					
Contribución del modelo biparabólico para describir el GRIN mediante dos polinomios cuadráticos (I ₄).					
Pertinencia del uso de la interpolación para evitar evaluaciones de función innecesarias (I ₅).					
Pertinencia del plano imaginario que divide el cristalino en el modelo biparabólico (I ₆).					
Pertinencia de los cinco parámetros independiente del modelo de GRIN biparabólico, con lo que es posible evaluar la función (2.3) dado un conjunto de mediciones experimentales del trayecto de la luz (I ₇).					
Contribución del método para la obtención de los parámetros que caracterizan el GRIN en cristalinos humanos <i>in vitro</i> , a partir de mediciones de la trayectoria de un rayo de luz (I ₈).					

ANEXO F

Resumen de los resultados para cada categoría según la opinión de los expertos encuestados.

Indicadore	C1	C2	C3	C4	C5	Total
I ₁	27	3	0	0	0	30
I ₂	24	6	0	0	0	30
I ₃	19	11	0	0	0	30
I ₄	19	10	1	0	0	30
I ₅	21	8	1	0	0	30
I ₆	23	7	0	0	0	30
I ₇	18	12	0	0	0	30
I ₈	23	7	0	0	0	30
Total	174	64	2	0	0	240

Tabla : Matriz de frecuencias

Indicadores	C1	C2	C3	C4	C5
I1	27	30	30	30	30
I2	24	30	30	30	30
I3	19	30	30	30	30
I4	19	29	30	30	30
I5	21	29	30	30	30
I6	23	30	30	30	30
I7	18	30	30	30	30
I8	23	30	30	30	30
Total	174	238	240	240	240

Matriz de frecuencias acumuladas

ANEXO G

Tabla: Matriz de frecuencias relativas acumuladas y determinación de los puntos de corte.

Indicadores	C1	C2	C3	C4	C5
I1	0,9000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
I2	0,8000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
I3	0,6333	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
I4	0,6333	0,9667	1,0000	1,0000	1,0000
I5	0,7000	0,9667	1,0000	1,0000	1,0000
I6	0,7667	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
I7	0,6000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
I8	0,7667	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Indicadores	C1	C2	Suma	P	N-P
I1	1,28	3,49	4,77	2,39	-0,53
I2	0,84	3,49	4,33	2,17	-0,31
I3	0,34	3,49	3,83	1,92	-0,06
I4	0,34	1,83	2,17	1,09	0,77
I5	0,52	1,83	2,36	1,18	0,67
I6	0,73	3,49	4,22	2,11	-0,26
I7	0,25	3,49	3,74	1,87	-0,02
I8	0,73	3,49	4,22	2,11	-0,26
Suma	5,04	24,61	29,65	14,82	
Puntos de corte	0,63	3,08		N=1,85	

Tabla : Determinación de los puntos de corte