



UNIVERSIDAD ESTATAL DE MILAGRO
VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS
CON MENCIÓN EN MODELACIÓN MATEMÁTICA

Tema:

**OPTIMIZACIÓN DE LA DINÁMICA DEL CONTROL PARA UNA TORRE DE
DESTILACIÓN DE LA INDUSTRIA DEL PETRÓLEO ECUATORIANO**

AUTOR:

Ing. Baidal Alvarado Víctor Felipe

Director TFM:

Ing. Aristides Reyes Bacardi MSc.

Milagro, julio de 2022

ECUADOR

ACEPTACIÓN DEL TUTOR

Yo, **Ing. Arístides Reyes Bacardi MSc** en mi calidad de director del trabajo de titulación, elaborado por **Ing. Víctor Felipe Baidal Alvarado**, cuyo tema es “**OPTIMIZACIÓN DE LA DINÁMICA DEL CONTROL PARA UNA TORRE DE DESTILACIÓN DE LA INDUSTRIA DEL PETRÓLEO ECUATORIANO**”, que aporta a la Línea de Investigación **Desarrollo productivo**, previo a la obtención del Grado de **Magíster en Matemática** con Mención en Modelación Matemática.

Por la presente hago constar que he analizado el proyecto de grado presentado por el **Ing. Víctor Felipe Baidal Alvarado**, para optar al título de **Magister en Matemática** y que acepto tutoriar al estudiante, durante la etapa del desarrollo del trabajo hasta su presentación, evaluación y sustentación.

Milagro, 28 de septiembre del 2022.



Firmado electrónicamente por:
**ARISTIDES
REYES**

Nombre: Ing. Arístides Reyes Bacardí Msc.

Cédula: 0956636336

DECLARACIÓN DE AUTORÍA DE LA INVESTIGACIÓN.

El autor de esta investigación declara ante el Comité Académico del Programa de Maestría en Matemática de la Universidad Estatal de Milagro, que el trabajo presentado es de mi propia autoría, no contiene material escrito de otra persona, salvo el que está referenciado debidamente en el texto; parte del presente documento o en su totalidad no ha sido aceptado para el otorgamiento de cualquier otro Título de una institución nacional o extranjera.

Milagro, a los 20 días del mes de julio del 2022 .



Firmado electrónicamente por.
**VICTOR FELIPE
BAIDAL
ALVARADO**

NOMBRE: ING. VICTOR FELIPE BAIDAL ALVARADO

CÉDULA: 0926401639

CERTIFICACIÓN DE LA DEFENSA

EL TRIBUNAL CALIFICADOR previo a la obtención del título de **Magister en Matemáticas** otorga al presente proyecto de investigación en las siguientes calificaciones:

TRABAJO DE TITULACIÓN	[58,33]
DEFENSA ORAL	[37,33]
PROMEDIO	[95,67]
EQUIVALENTE	Muy Bueno



Firmado electrónicamente por:
**BYRON RAMIRO
ROMERO ROMERO**

Msc. ROMERO ROMERO BYRON RAMIRO
PRESIDENTE/A DEL TRIBUNAL



Firmado electrónicamente por:
**SANTIAGO JOSE
CHELE DELGADO**

CHELE DELGADO SANTIAGO JOSE
VOCAL



Firmado electrónicamente por:
**LUIS ANGEL
BUCHELI**

Msc. BUCHELI CARPIO LUIS ANGEL
SECRETARIO/A DEL TRIBUNAL

DEDICATORIA

Dedico el presente trabajo a Dios, por haberme brindado la oportunidad de haber alcanzado y cumplir una etapa en mi formación profesional.

A mis padres, Josefa y Marcos, por darme su apoyo incondicional, consejos y la constante motivación para continuar formándome en el ámbito profesional.

A mi hermano Vinicio, por siempre apoyarme y motivarme siempre a seguir adelante a pesar de las dificultades que la vida nos presente.

AGRADECIMIENTO

En primer lugar quiero agradecer a Dios por permitirme llegar a esta instancia de vida profesional, a mi calida y prestigiosa Universidad Estatal de Milagro, que con mucho orgullo es la institución que me formó en los estudios de tercer nivel y ahora de cuarto nivel. Agradecer al personal docentes que nos guiaron en el camino de la adquisición de nuevos conocimientos. A los colegas de clase y amigos altruistas que con la empatía decidimos formar parte de este gran reto. Agradecer a mi estimado Tutor de Tesis Master Arístides Reyes Bacardí, quien con sus conocimiento, experiencia, sugerencias me guio en esta tarea ardua de emplear el conocimiento del modelamiento matemático, resaltando que la disciplina, constancia, perseverancia, son parte fundamental en el proceso del aprendizaje.

CESIÓN DE DERECHOS DE AUTOR

Sr. Dr.

Fabricio Guevara Viejo.

Rector de la Universidad Estatal de Milagro

Presente.

Mediante el presente documento, libre y voluntariamente procedo a hacer entrega de la Cesión de Derechos del Autor de Trabajo realizado como requisito previo a la obtención de mi Título de Cuarto Nivel cuyo tema fue “OPTIMIZACIÓN DE LA DINÁMICA DEL CONTROL PARA UNA TORRE DE DESTILACIÓN DE LA INDUSTRIA DEL PETRÓLEO ECUATORIANO”, y que corresponde al Vicerrectorado de Investigación y Postgrado.

Milagro, 28 de septiembre de 2022.



Firmado electrónicamente por:
**VICTOR FELIPE
BAIDAL
ALVARADO**

NOMBRE: ING. VICTOR FELIPE BAIDAL ALVARADO

CÉDULA: 0926401639

Índice General

Contenido

ACEPTACIÓN DEL TUTOR.....	2
DECLARACIÓN DE AUTORÍA DE LA INVESTIGACIÓN.....	3
CERTIFICACIÓN DE LA DEFENSA	4
DEDICATORIA.....	5
AGRADECIMIENTO.....	6
CESIÓN DE DERECHOS DE AUTOR	7
Índice de figuras.	10
Índice de Tabla.....	11
Glosario de términos	12
Resumen	13
Abstract.....	14
EL PROBLEMA DE ESTUDIO	1
1.1. Introducción.....	1
1.2. Descripción del Problema	1
1.3. Formulación del Problema	3
1.4. Objetivo general.....	4
1.5. Objetivos específicos.....	4
1.6. Metodología.....	4
1.7. Alcance del trabajo.....	9
CAPÍTULO 2	10
ESTADO DEL ARTE EN EL CONTROL DE UNA COLUMNA DE DESTILACIÓN BINARIA.	10
2.1 ESTADO DEL ARTE EN EL CONTROL DE LAS COLUMNAS DE DESTILACIÓN	10
2.2 Modelos matemáticos de una columna de destilación binaria en forma de matriz de funciones de transferencia	10
2.3 Obtención del modelo matemático en forma de sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.....	15
CAPÍTULO 3	22
DISEÑO DEL CONTROLADOR LINEAL CUADRÁTICO (LQR).....	22
3.1 Diseño de controladores en el espacio de estados.....	22
3.2 Ajuste del controlador óptimo mediante las matrices Q y R	23
3.2.1 Determinar el modelo matemático del sistema de ecuaciones lineales diferenciales en el espacio de estados.....	24
3.2.2 Determinar la controlabilidad del modelo vectorial matricial.....	24

3.2.3 Aplicar el programa para calcular las ganancias de realimentación de estados y de la integración.....	25
3.2.4 Correr el diagrama Simulink	26
3.2.5 Realizar el ajuste del regulador lineal cuadrático mediante la selección de los mejores valores de los elementos de las matrices Q y R	27
CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	46
CONCLUSIONES.....	46
RECOMENDACIONES.....	46
Referencias bibliográficas.	47
ANEXOS	49

Índice de figuras.

Figura 1.1.....	2
Columna de destilación binaria, configuración básica.....	2
Figura 2.1.....	11
<i>Modelo matemático de una columna de destilación binaria</i>	11
Figura 2.2.....	12
<i>Representa la interacción en la columna de destilación binaria</i>	12
Figura 2.3.....	17
<i>Respuestas individuales de cada función de transferencia de la matriz (2.1)</i>	17
Figura 2.4.....	18
<i>Muestra los parámetros que deben normarse en las respuestas alazo cerrado.</i>	18
Figura 2.4.....	19
<i>Sistema de control a lazo cerrado con $u = -\mathbf{K} x$</i>	19
Figura 3.1.....	27
<i>Diagrama para simular el regulador lineal cuadrático</i>	27
Figura 3.2.....	28
<i>Programación de los gráficos a observar al finalizar la simulación</i>	28
Figura 3.3.....	28
<i>Respuestas del modelo con un regulador LQR.</i>	28
Figura 3.4.....	29
<i>Respuesta de la variable Y1 al paso escalón unitario con</i>	29
Figura 3.5.....	29
<i>Respuesta de la variable Y2 al paso escalón unitario con valor</i>	29
Figura 3.6.....	32
<i>Respuesta de la variable Y1 al paso escalón unitario con valor</i>	32
Figura 3.7.....	32
<i>Respuesta de la variable Y2 al paso escalón unitario con valor</i>	32
Figura 3.8.....	35
<i>Respuesta obtenida para Y1</i>	35
Figura 3.9.....	36
<i>Respuesta obtenida para Y1</i>	36
Figura 3.10.....	36
<i>Relación entre las respuestas obtenidas para Y1</i>	36
Figura 3.11.....	37
<i>Respuesta obtenida para Y2</i>	37
Figura 3.12.....	38
<i>Respuesta obtenida para Y2</i>	38
Figura 3.13.....	38
<i>Relación entre las respuestas obtenidas para Y2</i>	38
Figura 3.14.....	39
<i>Respuesta obtenida para Y1</i>	39
Figura 3.15 Respuesta obtenida para Y1.....	40
Figura 3.16.....	40
<i>Relación entre las respuestas obtenida para Y1</i>	40
Figura 3.17.....	41
<i>Respuesta obtenida para Y2</i>	41
Figura 3.18.....	41

<i>Respuesta obtenida para Y2</i>	41
Figura 3.19.....	42
<i>Relación entre las respuestas Y2</i>	42

Índice de Tabla

Tabla 1 Tabla de monografías y artículos referenciados en (Camacho & Carvajal. ,2021).....	13
Tabla 3.1	30
<i>Tabla de resultados del ajuste sistemático con la matriz Qa manteniendo constante la matriz</i>	<i>30</i>
Tabla 3.2	31
<i>Tabla de las normas y su relación en función de Qa</i>	<i>31</i>
Tabla 3.3	33
<i>Tabla de resultados del ajuste sistemático con la matriz Ra manteniendo constante la matriz</i>	<i>33</i>
Tabla 3.5	42
<i>Resumen de los experimentos por simulación</i>	<i>42</i>
Tabla 3.6	43
<i>Resumen de los experimentos por simulación con</i>	<i>43</i>

Glosario de términos

Control óptimo es una técnica matemática usada para resolver problemas de optimización en sistemas que evolucionan en el tiempo y que son susceptibles de ser influenciados por fuerzas externas.

Destilación es una de las operaciones unitarias más comunes utilizada en la mayoría de las industrias químicas y del petróleo y la misma se realiza en unidades llamadas columnas o torres de destilación.

Ecuación de equilibrio es una función de la presión en la columna y la operación para composiciones conocidas, dependen del flujo, de la concentración y entalpía del alimentado cuyos valores afectan al valor del flujo de líquido y el del vapor y dentro de la columna.

Multivariables es la ramificación de cálculo infinitesimal en una variable al cálculo con funciones de varias variables.

Linear Quadratic Regulator (LQR) es un método de control óptimo con el cual se asegura la estabilidad de un sistema en lazo cerrado a través de ganancias de realimentación.

Resumen

En la presente tesis se analiza la dinámica del proceso de destilación en la industria con el propósito de obtener el control optimal en base de modelos matemáticos complejos mediante el método de cálculo variacional de funcionales para su implementación en un proceso de destilación binaria.

Es importante tener presente que el modelado y el control en línea son muy relevantes para la refinación del combustible, principalmente por su influencia en la calidad de los diferentes productos de la refinación y también en el consumo de energía. La complejidad y la gran cantidad de interacciones hacen que un solo controlador pueda resolver el problema de obtener prestaciones de calidad. Por tal motivo se procede al estudio de los sistemas de ecuaciones diferenciales con interacciones entre las variables de estado, o sea al estudio del comportamiento de un sistema de ecuaciones controlado y la interacción entre las variables.

Para ello el diseño de la investigación se dirige a identificar las características algebraicas de los modelos n-dimensionales controlables, observables y estabilizables a través de la formulación de matrices polinómicas para definir la dinámica de los procesos modelados, permitiendo determinar el grado de interrelación entre las variables a observar en el modelo matemático y de esta forma obtener el controlador optimal tal que minimice los errores de control y proporcionen desempeños en correspondencia con los requerimientos de diseño requerido.

Palabras claves: destilación binaria, multivariable, control optimal, ecuaciones diferenciales con interacciones.

Abstract

In this thesis, the dynamics of the distillation process in the industry are analyzed with the purpose of obtaining the optimal control based on complex mathematical models through the variational calculation method of functionals for its implementation in a binary distillation process.

It is important to keep in mind that online modeling and control are highly relevant to fuel refining, mainly because of their influence on the quality of the different refining products and also on energy consumption. The complexity and the large number of interactions mean that a single controller can solve the problem of obtaining quality performance. For this reason, we proceed to the study of systems of differential equations with interactions between the state variables, that is, the study of the behavior of a controlled system of equations and the interaction between the variables.

For this, the research design is aimed to identify the algebraic characteristics of the controllable, observable and stabilizable n -dimensional models through the formulation of polynomial matrices to define the modeled process dynamics characteristics, allowing to determine the interrelation degree between the variables to observe in the mathematical model and in this way obtain the optimal controller such that it minimizes control errors and provides performances in correspondence with the required design requirements.

Keywords: binary distillation, multivariable, optimal control, differential equations with interactions.

CAPÍTULO 1

EL PROBLEMA DE ESTUDIO

1.1. Introducción

Por su naturaleza los procesos químicos industriales son multivariables y no lineales. Estos procesos químicos industriales son difíciles de modelar y complejos de controlar dadas las incertidumbres del sistema.

La destilación es una de las operaciones unitarias más comunes utilizada en la mayoría de las industrias químicas y del petróleo y la misma se realiza en unidades llamadas columnas o torres de destilación. La destilación se emplea para separar dos o más componentes que existen en una mezcla fluida homogénea.

La calidad y la pureza de la destilación son de suma importancia, por lo tanto, se requiere del adecuado control del sistema.

Una cantidad significativa de artículos está disponible sobre modelado y control de la columna de destilación, por ejemplo (Rijnsdorp. , Interaction in two-variable control distillation columns., 1965), (Wood & Berry. , 1973,), (Martin-Sanchez & Shah. , 1984) y (Gani, Ruiz , & Cameron., 1986). Una perspectiva tutorial sobre la dinámica y el control de la columna de destilación se reporta en (Skogestad, & Postlethwaite, 2001).

1.2. Descripción del Problema

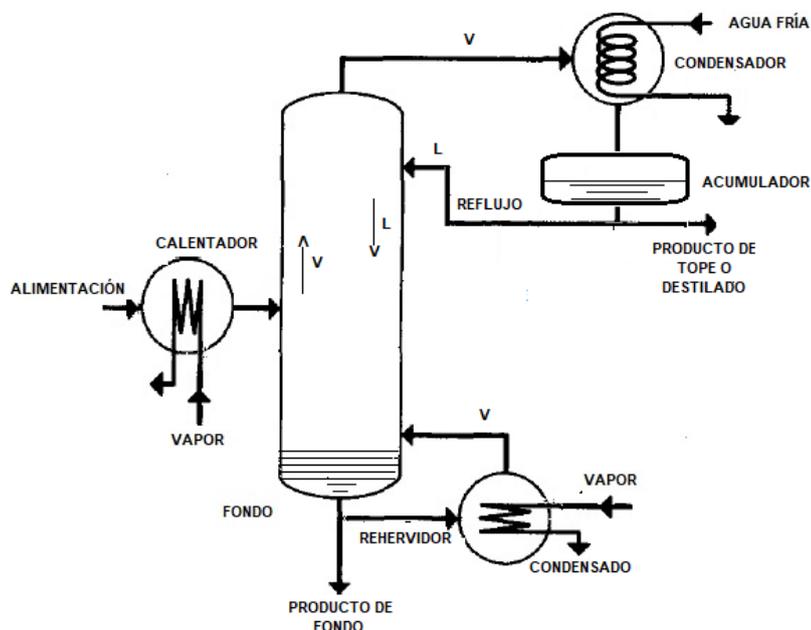
Debido al aspecto no lineal del proceso químico en un rango amplio de condiciones de operación, se dificulta obtener un modelo preciso del sistema.

El interés en desarrollar modelos matemáticos para columnas de destilación se centró (Cameron, Ruiz , & Gani. , 1986) en la posibilidad de incorporar simulaciones de lazo abierto para fines de control convencional.

El control de la columna de destilación es un problema que ha sido ampliamente reportado en las industrias del petróleo (Ruiz, , Cameron, & Gani. , 1988). Cuando son controladas varias salidas, las columnas de destilación se ven como sistemas con gran interacción. La tecnología convencional de control, comúnmente empleada, dígase los lazos de control simples del tipo proporcional, integral derivativo (PID) o las técnicas de control multilazos presentan un desempeño deficiente al compararlas con los controladores multivariables (Wood & Pacey, 1972).

En la figura 1.1 se muestra un esquema de la configuración básica del sistema de destilación para una mezcla binaria de salida del producto. La columna es un cuerpo cilíndrico vertical, dentro del cual se disponen bandejas o platos horizontales con el objetivo de garantizar el contacto entre la fase vapor que asciende y la fase líquida que desciende.

Figura 1.1
Columna de destilación binaria, configuración básica



El contacto entre las fases proporciona el intercambio de masa y calor. El rehervidor es el equipo que forma el flujo de vapor V que asciende por dentro de

la columna. Este flujo se origina vaporizando parte del líquido, rico en el componente pesado de la mezcla, que sale del fondo de la columna.

El condensador es el equipo donde se condensa el flujo de vapor V y el acumulador es el recipiente que contiene el líquido condensado. Este líquido se divide en dos corrientes la primera se denomina destilado y es el producto final de la columna y la segunda es el reflujo L que se incorpora a la columna.

En la destilación ocurren fenómenos de intercambio bien complejos donde intervienen varias variables algunas de las cuales pueden ser controladas y otras no.

1.3. Formulación del Problema

El objetivo, en última instancia, del control de la columna de destilación es mantener constante el valor de la composición en una de las corrientes del líquido que sale de la columna o en todas las corrientes de salida (Rijnsdorp. , Interaction in two-variable control distillation columns., 1965).

En la columna de destilación la composición de las corrientes de salida está estrechamente vinculada con las ecuaciones de equilibrio de la mezcla y con las líneas de operación de la columna (Wood & Berry. , 1973,).

La ecuación de equilibrio es una función de la presión en la columna y la operación para composiciones conocidas, dependen del flujo, de la concentración y entalpía del alimentado cuyos valores afectan al valor del flujo de líquido y el del vapor y dentro de la columna.

Las variables manipuladas más importantes en los procesos de destilación son: la energía calórica suministrada por el fondo, denotada por Q_{calor} , la energía absorbida para enfriamiento del líquido en el tope, dada como Q_{enfr} y la relación del reflujo R , las cuales influyen en la presión de funcionamiento de la columna, la carga de la bandeja y el grado de separación de los componentes (Wood & Pacey, 1972).

Como se observa, hay una alta complejidad dada la fuerte interacción entre las variables a controlar en la columna de destilación. Así, se plantea la pregunta de investigación:

¿Qué tipo de controlador debe instalarse en el proceso de destilación que resuelva, de manera óptima, el control ante fuertes influencias internas y perturbaciones externas a la operación?

1.4. Objetivo general.

Obtener el control óptimo de modelos matemáticos complejos mediante el método de cálculo variacional de funcionales para su implementación en un proceso de destilación binaria.

1.5. Objetivos específicos.

- Identificar las características algebraicas de los modelos n-dimensionales controlables, observables y estabilizables mediante la formulación de matrices polinómicas para definir la dinámica de los procesos modelados
- Determinar el grado de interrelación entre las variables a observar en el modelo matemático evaluando el grado de las interacciones entre las variables,
- Comparar los resultados obtenidos con los métodos de control óptimo del cálculo variacional en modelos n-dimensionales
- Aplicar el mejor resultado de optimización en un ejemplo de modelo matemático de columna de destilación.

1.6. Metodología

En este trabajo se procede al estudio de los sistemas de ecuaciones diferenciales con interacciones entre las variables de estado, o sea al estudio del comportamiento de un sistema de ecuaciones controlado y la interacción entre las variables.

El problema tiene aspectos matemáticos y numéricos por lo que el Tipo de Investigación es Cuantitativa.

La “Población Sujeta a Estudio” es el espacio de funciones lineales siendo el subconjunto “Muestra de Estudio” las funciones algebraicas definidas como el control, el cual es una suma ponderada de los estados del sistema de ecuaciones diferenciales.

Los Métodos de Investigación empleados en esta tesis fueron la combinación del Método Lógico y del Método Empírico, el primero se desarrolla a continuación en este capítulo y permitió el acercamiento al conocimiento del control optimal y el segundo se emplea para la verificación de la Pregunta de Investigación mediante simulaciones computacionales, proporcionándose el programa Simulink de MATLAB® que no solo permite el ajuste de los valores de las matrices Q y R sino que también permite replicar los experimentos.

Como Técnica de Investigación se ha empleado el Experimento, creado artificialmente en Simulink de MATLAB® el cual consiste en la realización de varias pruebas empleando diferentes valores de las matrices de peso Q y R que forman parte del integrando del funcional J hasta obtener una respuesta satisfactoria del sistema.

El Instrumento de Investigación empleado para recoger la información necesaria sobre los modelos matemáticos de las columnas de destilación es el estudio de la bibliografía presentada en el Estado del Arte, del cual se ha seleccionado el modelo con mayor información documental publicada en revistas indexadas y tesis sustentadas, y por ende no es necesario validarlo.

Para darle solución al problema se define la medición o métrica del espacio. Se busca la función de control u que minimice un funcional dado J .

Se incluye la verificación de la existencia de la solución óptima que resuelva el problema en el sentido de mínimo error final y tiempo mínimo de duración del proceso de tránsito para la eliminación de perturbaciones no casuales.

En (Rijnsdorp. , Interaction in two-variable control distillation columns. II. Application Of Theory., 1965) se resuelve el problema de controlar un proceso de múltiples entradas y múltiples salidas mediante la aplicación de un control clásico Proporcional, Integral y Derivativo (PID) que puede adaptar sus parámetros a las variaciones del modelo.

Este control encara adecuadamente los problemas de incertidumbre en los valores de los parámetros del modelo, sin embargo, el mismo no se diseña a partir del requerimiento de encontrar los valores óptimos de los parámetros del control.

Los requerimientos de diseño del control optimal, para un sistema descrito en la formulación de ecuación vectorial matricial, se fundamentan como sigue:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.1)$$

Donde se denotan los estados del sistema en función del tiempo por

$x(t)$ – *vector de estados de dimensión n*

Y la variación del vector de estados en el tiempo continuo por

$\dot{x}(t)$ – *tasa de variación del vector de estados con el tiempo*

La matriz de los estados, que suponemos invariable con el tiempo, o sea de entradas constantes se denota por

$$A \in M_{n \times n} - \{a_{ij}\} \in \mathbb{R}$$

$u(t)$ – *vector de control de dimensión m*

$$B \in M_{n \times m} - \{b_{ij}\} \in \mathbb{R}$$

Con condiciones iniciales y finales

$x(0) = x_0$ – *vector de condiciones iniciales*

$x(t_f) = 0$ – *vector de condiciones finales*

Bajo la condición del par (A, B) totalmente estabilizable, se requiere que los estados sean totalmente controlables.

Sintetizar un regulador lineal cuadrático presupone encontrar una función vectorial $u(t)$ tal que minimice el funcional:

$$J = \int_0^{\infty} V dt \quad (1.2)$$

Siendo

$$V = x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t) \quad (1.3)$$

Donde Q y R son matrices de dimensiones adecuadas, denominadas de ponderación, con Q simétrica y semidefinida positiva y R simétrica pero definida positiva. En casos prácticos es conveniente utilizar matrices diagonales Q y R por simplicidad,

Buscando el mínimo del funcional (1.2), tendremos:

$$\min_J J = \int_0^\infty x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)dt \quad (1.4)$$

Encontrando el Hamiltoniano

$$H = x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t) + \lambda[Ax(t) + Bu(t)] \quad (1.5)$$

Utilizado a λ como el equivalente a los multiplicadores de Lagrange, se completa el Hamiltoniano al multiplicar el multiplicador por las restricciones de igualdad dadas por (1.1) y (1.2). Derivando la expresión obtenida (1.5) tendremos:

$$\dot{x} = \frac{dH}{d\lambda} = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.6)$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{dH}{dx} = -Qx(t) - A^T\lambda \quad (1.7)$$

Y como queremos minimizar por la variable de control, tendremos que:

$$0 = \frac{dH}{du} = Ru(t) + B^T\lambda \quad (1.8)$$

El sistema formado entonces se puede reescribir como (1.9)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax(t) + Bu(t) \\ \dot{\lambda} &= -Qx(t) - A^T\lambda \\ 0 &= Ru(t) + B^T\lambda \end{aligned} \quad (1.9)$$

Las dos primeras forman un sistema de variables (x, λ) y la última ecuación nos proporciona un valor para el control dado por:

$$u(t) = -R^{-1}B^T\lambda \quad (1.10)$$

Suponiendo que $\lambda = Px$ o sea que los multiplicadores de Lagrange dependen de los estados, así:

$$\dot{\lambda} = P\dot{x} \quad (1.11)$$

$$u(t) = -R^{-1}B^TPx \quad (1.12)$$

La nueva matriz P es ahora la incógnita. Sustituyendo (1.11) en (1.1) tendremos:

$$\dot{x} = Ax(t) - BR^{-1}B^TPx(t) \quad (1.13)$$

Premultiplicando (1.13) por P ;

$$P\dot{x} = PAx(t) - PBR^{-1}B^T Px(t)$$

Y de (1.9) tendremos

$$P\dot{x} = PAx(t) - PBR^{-1}B^T Px(t) = -Qx(t) - A^T Px(t)$$

Agrupando de un lado y sacando factor común tendremos:

$$(PA - PBR^{-1}B^T P + Q + A^T P)x(t) = 0 \quad (1.14)$$

Ya que buscamos el valor del control que minimiza la función de costo la matriz que premultiplica a los estados debe ser cero para que se verifique (1.14)

$$PA - PBR^{-1}B^T P + Q + A^T P = 0 \quad (1.15)$$

La ecuación (1.15) es la ecuación algebraica de Riccati, cuya solución permitirá determinar el control optimal de (1.12).

Esta solución tiene la particularidad de solucionar un control optimal para un modelo en el formalismo de entrada estado de una entrada y una salida (SISO), o sea uni-dimensional.

De lo que se trata es de solucionar un control optimal para un modelo en el mismo formalismo de entrada-estado, pero con múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO), o sea nxm-dimensional.

El modelado y el control en línea son muy relevantes para la refinación del combustible, principalmente por su influencia en la calidad de los diferentes productos de la refinación y también en el consumo de energía (Cameron, Ruiz, & Gani., 1986) y (Ruiz, Cameron, & Gani., 1988).

La complejidad y la gran cantidad de interacciones hacen que un solo controlador pueda resolver el problema de obtener prestaciones de calidad.

El algoritmo de control optimal denominado Regulador Lineal Cuadrático en base al modelo en espacio de estados, denotado con más frecuencia como LQR se presenta como un enfoque diferente para resolver el problema del control óptimo de procesos (Ruiz, Cameron, & Gani., 1988) modelados como sistemas de múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO).

El tema planteado es actual ya que se trata de optimizar un problema de control en una columna de destilación las cuales se emplean en procesos de la industria

ecuatoriana, tales como en las empresas CODANA, SODERAL y las futuras refinerías del petróleo de Ecuador

1.7. Alcance del trabajo

Se pretende obtener el controlador optimal tal que minimice los errores de control y proporcionen desempeños en correspondencia con los requerimientos de diseño.

Se proporcionarán los programas en código MALTLAB® y los diagramas Simulink requeridos para una futura implementación del control optimal.

CAPÍTULO 2

ESTADO DEL ARTE EN EL CONTROL DE UNA COLUMNA DE DESTILACIÓN BINARIA.

2.1 ESTADO DEL ARTE EN EL CONTROL DE LAS COLUMNAS DE DESTILACIÓN

De (Camacho & Carvajal. , 2021) se conoce que la destilación es una operación unitaria que puede realizarse industrialmente de dos maneras, calentando la mezcla hasta la ebullición para producir vapor y posteriormente condensar ese vapor para obtener un líquido a partir del componente más volátil. El líquido restante en el fondo de la columna de destilación también es un producto de la operación unitaria.

En la columna de destilación entonces ocurre que existe un elemento en estado gaseoso separado de la mezcla la cual se compone de la alimentación sistemática de la mezcla y las burbujas de vapor en el interior del líquido mezclado.

Este proceso es un proceso bien complejo que debe ser diseñado definiendo ante todo los objetivos del control. Estos objetivos quedan definidos en (Camacho & Carvajal. , 2021) como sigue:

- Control del balance de materiales,
- Control de la calidad del producto,
- Satisfacción de las limitaciones impuestas al proceso por motivos de seguridad.

2.2 Modelos matemáticos de una columna de destilación binaria en forma de matriz de funciones de transferencia

El modelo matemático que se presenta a continuación en la figura 2.1 es obtenido de (Camacho & Carvajal. , 2021)

Figura 2.1

Modelo matemático de una columna de destilación binaria

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12.8}{16.7s + 1} & \frac{-18.9}{21s + 1} \\ \frac{6.6}{10.9s + 1} & \frac{-19.4}{14.4s + 1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Para comprender este modelo es necesario observar que hay un vector de entrada, dado por $U^T = (u_1 \ u_2)$

Donde U^T –es un vector transpuesto de las entradas al modelo

u_i – componentes del vector de entrada denominado vector de control de la columna de destilación,

La matriz cuadrada de 2x2 representa un proceso con interacción, lo cual es evidente si se observa que los elementos en la diagonal secundaria no son nulos y tienen una dinámica dada por los denominadores de cada función de transferencia:

$g_{11}(s) = \frac{12.8}{16.7s+1}$ – función de transferencia que relaciona la entrada 1 con la salida 1

$g_{12}(s) = \frac{-18.9}{21s+1}$ – función de transferencia que relaciona la entrada 2 con la salida 1

$g_{21}(s) = \frac{6.6}{10.9s+1}$ – función de transferencia que relaciona la entrada 1 con la salida 2

$g_{22}(s) = \frac{-19.4}{14.4s+1}$ – función de transferencia que relaciona la entrada 2 con la salida 2

El hecho que no sean nulas las funciones de transferencia en diagonal secundaria implica que existe una interrelación entre las entradas y las salidas,

lo cual complica fuertemente cualquier tipo de control que se desee hacer para controlar el proceso de destilación binaria.

Lo antes expuesto puede representarse en la figura 2.2, tomada de (Camacho & Carvajal. , 2021)

Figura 2.2.

Representa la interacción en la columna de destilación binaria

$$y_1(s) = \frac{12.8}{16.7s + 1} u_1(s) - \frac{18.9}{21s + 1} u_2(s)$$

$$y_2(s) = \frac{6.6}{10.9s + 1} u_1(s) - \frac{19.4}{14.4s + 1} u_2(s)$$

En la figura 2.2 se muestran las variables de salida $y_1(t), y_2(t)$ de la columna de destilación binaria y las variables de entrada $u_1(t), u_2(t)$ ya referidas.

Las variables de salida de la columna de destilación son:

$y_1(s)$ – representará a la composición del tope

$y_2(s)$ – representará a la composición del fondo

$u_1(s)$ – representará al flujo del reflujo

$u_2(s)$ – representará al flujo del vapor

En lo que sigue solo nos referiremos a las variables por la manera en que están denotadas. En (Camacho & Carvajal. , 2021) se emplean las denominaciones correctas desde el punto de vista del control de procesos.

Para nuestra tesis de Maestría de Matemática sólo emplearemos la clásica representación de las variables.

Siguiendo a (Camacho & Carvajal. , 2021) encontramos un resumen de 31 artículos dedicados al control de la columna de destilación referenciados en una tabla, que por su importancia se reproduce en esta tesis.

Tabla 1 Tabla de monografías y artículos referenciados en (Camacho & Carvajal, 2021)

MONOGRAFÍAS REVISADAS		
	TÍTULO	AÑO
1	Control Multivariable. ESPOL	2018
2	Model Predictive Control System Design and Implementation using MATLAB	2009
3	Model Predictive Control. Second Edition	2007
4	Multivariable Control Systems: An Engineering Approach	2004
5	Process Control: Modeling, Design, and Simulation	2002
6	Predictive Control with Constraints	2002
7	Multivariable Feedback Control. Analysis & Design	2001
8	Procesos químicos y termo energéticos. Dinámica y control. Tomo II	1988
ARTÍCULOS		AÑO
1	Interaction in two-variable control distillation columns I	1965
2	Interaction in two-variable control distillation columns II	1965
3	Terminal composition control of a binary distillation column	1973
4	An extension of the Smith Predictor method to multivariable linear systems containing time delays	1973
5	Terminal composition control of a binary distillation column	1973
6	Multivariable computer control. A case study	1976
7	Internal Model Control 1. A Unifying Review and Some New	1982
8	Multivariable Adaptive Predictive Control of a Binary Distillation Column	1984
9	Internal Model Control 2. Design Procedure for Multivariable Systems	1985
10	Design of Distillation Column Control Systems	1985
11	Internal Model Control. 3. Multivariable Control Law Computation and Tuning Guidelines	1985
12	Internal Model Control 3. Multivariable Control Law Computation	1985
13	A Generalized Model for Distillation Columns-I. Model Description and Applications	1986

14	A Generalized Model for Distillation Columns-II. Numerical and Computational Aspects	1986
15	A Generalized Model for Distillation Columns-III. Study of Startup Operations	1988
16	Procesos químicos y termo energéticos. Dinámica y control. Tomo II	1988
17	IMC controller design for multivariable systems	1990
18	Dynamics and Control of Distillation Columns. A tutorial introduction	1997
19	Model Predictive Control of a crude oil distillation column	1999
	Decoupling Smith Predictor design for Multivariable Systems with Multiple Time Delays	2000
20	An approach to predictive control of multivariable time-delayed plant: Stability and design issues	2004
21	Analytical Design of Decoupling Internal Model Control (IMC) Scheme for Two-Input-Two-Output (TITO) Processes with Time Delays	2006
22	Design of PID Controllers for Delayed MIMO Plants using Moments Based Approach	2006
23	Analytical Design of Decoupling Internal Model Control (IMC) Scheme for Two-Input-Two-Output (TITO) Processes with Time Delays	2006
24	An extension of the Smith Predictor method to multivariable linear systems containing time delays	2007
25	Implementation of Internal Model Control (IMC) in Continuous Distillation Column	2010
26	Implementation of Internal Model Control (IMC) in Continuous Distillation Column	2010
27	Decoupling Smith Control for Multivariable System with Time Delays	2011
28	Decoupling Smith Control for Multivariable System with Time Delays	2011

29	Design of a Multivariable Internal Model Controller based on Singular Value Decomposition	2012
30	Design and Development of Model Predictive Controller for Binary Distillation Column	2013
31	Design and Development of Model Predictive Controller for Binary Distillation Column	2013

Como se puede observar no se encontró por los autores el diseño del control optimal para la columna de destilación dada por (2.1). Esto permite esperar que el control optimal que se diseñará en esta presente tesis sea de interés no solo para los matemáticos, sino también para el círculo de ingenieros dedicaos al control de procesos.

2.3 Obtención del modelo matemático en forma de sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

La matriz de funciones de transferencia dada en la figura 2.2 no puede ser empleada para diseñar el control optimal clásico denominado como LQR.

Para realizar ese diseño del control optimal se requiere expresar el modelo como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

MATLAB® es una plataforma de programación y cálculo numérico (Reyes Bacardí., 2019) que se usa para analizar datos, para desarrollar algoritmos y desarrollar modelos matemáticos, los cuales pueden ser optimizados empleando diferentes funciones de esta plataforma programática.

Esta plataforma permite realizar el traslado de en modelo matemático expresado en forma de matriz de funciones de transferencia a un modelo en variables de estado.

La matriz de interés es dada por (2.1)

$$G(s) = \begin{pmatrix} \frac{12.8}{16.7s+1} & \frac{-18.9}{21s+1} \\ \frac{6.6}{19.9s+1} & \frac{-19.4}{14.4s+1} \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Mediante una subrutina de transformación de (2.1) al espacio de estado, mostrada en el Anexo 1, se ha obtenido un modelo matemático que se expresa en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, como se muestra en el sistema (2.2)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -0.059x_1(t) + u_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -0.05x_2(t) + 0.5u_1(t) \\ \dot{x}_3(t) &= -0.047x_3(t) + u_2(t) \\ \dot{x}_4(t) &= -0.069x_4(t) + u_2(t)\end{aligned}\tag{2.2}$$

Esto es un sistema de dos entradas, dos salidas y cuatro estados (Palacios Zambrano & Franco García, Diseño del controlador predictivo multivariable para el control de la temperatura y la velocidad en una extrusora de polímeros. Tesis Maestría ESPOL, 2020)

Como se puede observar, el sistema (2.2) es un modelo en espacio de estados que está desconectado, esto se puede inferir a partir de la observación de cada ecuación ya que la razón de cambio del estado i -ésimo $x_i(t)$ no depende de los demás estados $\forall i = 1,2,3$ y pueden ser controlables, lo cual es evidente ya que cada ecuación es gobernada por su variable de control.

Es de notar que los estados tres y cuatro son estados parásitos. Ellos surgen por la transformación de la matriz de funciones de transferencia 2×2 al espacio de estados, que como se sabe (Palacios, & Zambrano, 2020), proporciona una realización mínima, la cual puede contener estados no físicos. En este caso el comportamiento de los estados $x_3(t)$ y $x_4(t)$ no determinan el comportamiento del sistema obtenido, puesto que no aparecen en las ecuaciones diferenciales para $x_1(t)$ y $x_2(t)$

La aparición de dos nuevos estados se debe a que la transformación desde una matriz de funciones de transferencia a un modelo en variables de estado no es unívoca y MATLAB® presenta una realización mínima.

La salida del sistema se expresa como indica (2.3) y (2.4);

$$y_1(t) = 0.766x_1(t) - 0.9x_3(t) \quad (2.3)$$

$$y_2(t) = 0.066x_2(t) - 1.347x_4(t) \quad (2.4)$$

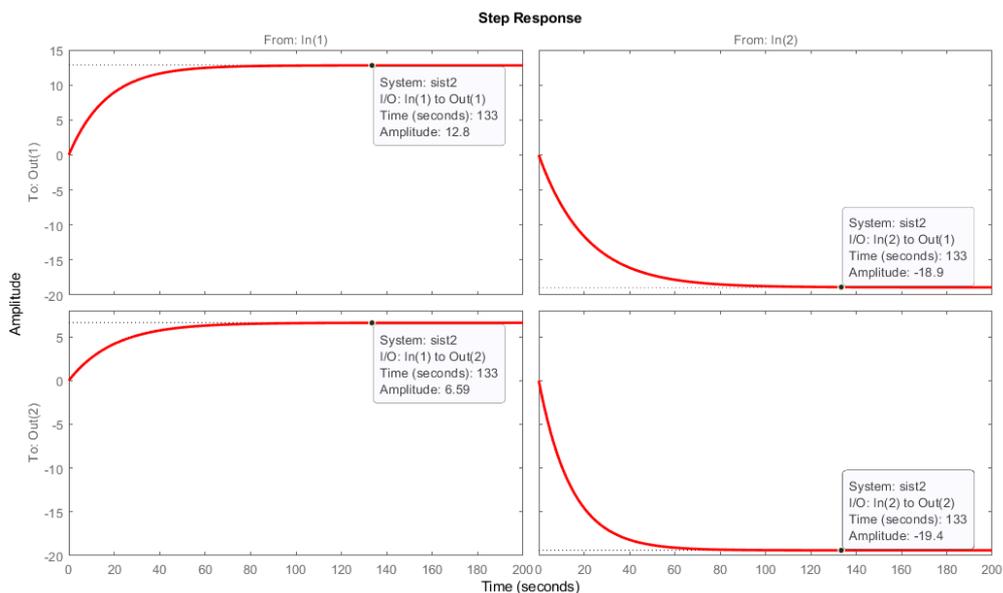
En la figura 2.3 se muestran las respuestas de cada función de transferencia del sistema modelado por la matriz de funciones de transferencia.

Como se observa, al aplicar un paso escaló unitario la salida de la función de transferencia $g_{11}(s)$ alcanza un valor de establecimiento de 12.8. De igual manera la salida de la función de transferencia $g_{12}(s)$ alcanza un valor de establecimiento de -18.9, este valor negativo se debe al signo negativo del numerador de dicha función.

Observando el resto de los gráficos se ve que la respuesta de $g_{21}(s)$ alcanza un valor de establecimiento de 6.59. De igual manera la respuesta de $g_{22}(s)$ se establece en el valor de -19.4. De manera similar a lo expresado anteriormente para la respuesta de $g_{12}(s)$ esto se debe al signo negativo del numerador o ganancia de esa función de transferencia $g_{22}(s)$.

Figura 2.3

Respuestas individuales de cada función de transferencia de la matriz (2.1)

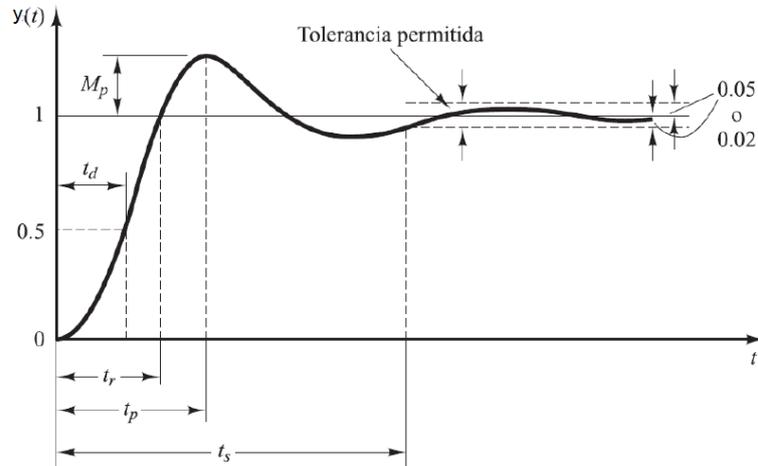


En (Ogata, 2010) quedó establecido que se puede formar la señal de control considerando que sea una función lineal de los estados del modelo.

En la figura 2.4 se muestran los índices de desempeño que caracterizan a una respuesta oscilante (Ogata, 2010)

Figura 2.4

Muestra los parámetros que deben normarse en las respuestas alazo cerrado.



Se diseña entonces un controlador por realimentación de estados y se ajustan los valores de las ganancias de manera que se logren cumplir las exigencias de diseño, las cuales son:

- Mínimo tiempo de subida de las salidas $t_r \leq$
- Mínimo tiempo de establecimiento del proceso en el valor final $t_{est} \leq$
- Sobreregulación no mayor de $M_p \leq \%$

Las matrices obtenidas con el programa de transformación del modelo en matriz de funciones de transferencia a modelo en espacio de estados se dan a continuación:

$$A = \begin{bmatrix} -0.059 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.047 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.069 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0.766 & 0 & -0.9 & 0 \\ 0 & 0.66 & 0 & -1.35 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

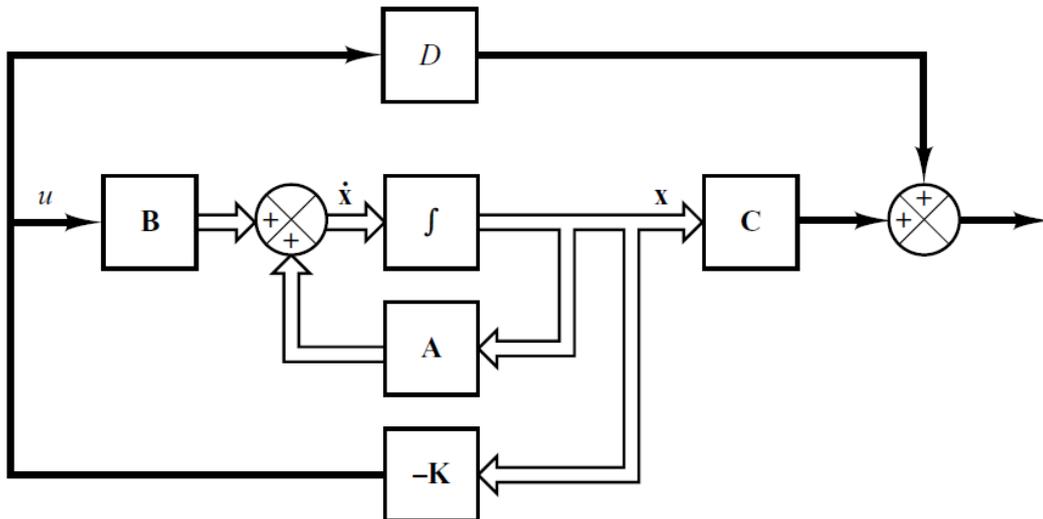
$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

En la figura 2.4 se muestra el diagrama en bloques que representa al control por realimentación de estados.

Obsérvese que en el mismo se tienen las matrices antes mencionadas desde (2.5) hasta (2.8) y las líneas dobles representan un enlace vectorial con dichas matrices.

Figura 2.4

Sistema de control a lazo cerrado con $u = -K \bar{x}$



Dado el sistema de entrada única o múltiple para encontrar la matriz de ganancias de realimentación de estado del sistema

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t)$$

$$Y = CX(t) + DU(t)$$

Con

$$A \in M_{n \times n}$$

$$B \in M_{n \times 1}$$

$$C \in M_{1 \times n}$$

$$D \in M_{n \times n}$$

Y dado un vector de entradas complejas

$$p = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n]$$

de ubicaciones deseadas de los polos en lazo cerrado autoconjugados, el comando o función de MATLAB® place calcula una matriz de ganancia K tal que la retroalimentación de los estados $u = -Kx$ coloca los polos en lazo cerrado en

las ubicaciones indicadas por el vector complejo p . En otras palabras, los valores propios de $A - BK$ coinciden con las entradas de p (hasta el orden).

Este comando supone que las entradas de la planta son entradas de control. La longitud de p debe coincidir con el tamaño de fila de A .

El comando `place` funciona para sistemas de múltiples entradas y múltiples salidas y se basa en el algoritmo de (Kautsky, Nichols, and P. Van Dooren, " & Van Doren, 1985).

Para la sintaxis

$$[K, \text{prec}, \text{message}] = \text{place}(A, B, p)$$

Este comando devuelve la variable "prec", una estimación de qué tan cerca coinciden los valores propios de $A - BK$ con las ubicaciones especificadas. Si algún polo de lazo cerrado distinto de cero está a más del 10 % de distancia de la ubicación deseada, la variable "message" contiene un mensaje de advertencia. Calculando la nueva matriz a lazo cerrado:

$$A_{\text{lazo}} = A - BK = \begin{bmatrix} -0.059 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.047 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.069 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} * \\ [10^3 \begin{pmatrix} -3.7341 & 7.5032 & 0.7977 & -0.8044 \\ 2.6554 & -5.3254 & 0.0483 & -0.0391 \end{pmatrix}]$$

Resolviendo empleando MATLAB®

$$A_{\text{lazo}} = 10^3 \begin{bmatrix} 3.7340 & -7.5032 & -0.7977 & 0.8044 \\ 1.8670 & -3.7516 & -0.3989 & 0.4022 \\ -2.6554 & 5.3254 & -0.0484 & 0.0391 \\ -2.6554 & 5.3254 & -0.0483 & 0.0390 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

La matriz (2.9) refleja la nueva matriz de los estados para el sistema a lazo cerrado o sea para el sistema con la realimentación de los estados.

Es de señalar que la realimentación de los estados emplea la ubicación de los polos en un lugar determinado generalmente por la experticia del investigador o

sea según el conocimiento que él tenga hará la propuesta de ubicación de los polos del sistema.

Evidentemente esto conlleva a una apreciación subjetiva del ajuste del controlador el cual posteriormente debe ser implementado en los sistemas reales.

Esta subjetividad se elimina empleando el control optimal, que es el objeto de estudio del próximo capítulo.

CAPÍTULO 3

DISEÑO DEL CONTROLADOR LINEAL CUADRÁTICO (LQR)

3.1 Diseño de controladores en el espacio de estados

El diseño de controladores en el espacio de estados proviene de los trabajos de investigación realizados por (Kalman, 1960) desde mediados del siglo pasado. El desarrollo del diseño de controladores óptimos, posterior a Kalman ha sido extenso, llegando hasta nuestros días con el desarrollo del Regulador Lineal Cuadrático óptimo robusto presentado por (Terra, , Cerri, & Ishihara, 2014).

La historia del desarrollo de la teoría del diseño del controlador optimal puede encontrarse además en (Clarke, 2005). Este artículo trata sobre el desarrollo del principio del máximo de control óptimo durante los primeros tiempos de la Guerra Fría, cuando los matemáticos de EE. UU. y la URSS hicieron todo lo posible por resolver problemas de intercepción de tiempo mínimo, que luego se convirtieron en prototipos de los primeros problemas de control óptimo.

El documento es una breve encuesta sobre la historia del control óptimo, una secuencia de ideas ingeniosas y arrepentimientos de oportunidades perdidas. Las conclusiones del artículo se extraen de la monografía del segundo autor sobre el desarrollo de la teoría del control óptimo desde sus inicios hasta que se convirtió en una disciplina matemática independiente.

La metodología de diseño de este regulador, a menudo llamado controlador fue expuesta en el capítulo por lo que en adelante solo se exponen las particularidades del diseño y la programación.

Posteriormente se expone un análisis exhaustivo de la influencia de las matrices Q y R en las prestaciones del regulador aplicado a un sistema de ecuaciones diferenciales con interacción entre ellas.

3.2 Ajuste del controlador óptimo mediante las matrices Q y R

El diseño de controladores en el espacio de estados está explicado en (Ogata, 2010) de manera detallada. En lo que sigue se hará el diseño de un controlador por realimentación de estados para poder realizar la comparación entre este diseño y el diseño del controlador óptimo.

Para efectuar el diseño de este regulador será necesario calcular las ganancias de realimentación de los estados, lo cual resulta hoy en día fácil mediante las funciones que proporciona Matlab®.

Esta función es:

lqr – que permite el diseño del regulador lineal cuadrático mediante el cálculo de las ganancias de la realimentación de estados que minimizan el criterio cuadrático integral dado por (3.1).

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (3.1)$$

Donde

Q – es una matriz positiva definida o semidefinida positiva

R – es una matriz definida positiva

x – es el vector n dimensional de los estados

u – es el vector de los controles.

El comando *lqr* calcula la matriz de ganancia de realimentación óptima K de modo que la ley de control de realimentación minimice el índice de rendimiento J sujeto a la ecuación de restricción.

La ecuación de restricción en el caso expuesto en la presente tesis es un sistema de ecuaciones lineales diferenciales ordinarias, que rige la dinámica de comportamiento del sistema (2.2)

El empleo de este comando puede proporcionar otros datos de interés tales como el vector de auto valores o valores propios del sistema después de realimentados los estados, la matriz definida positiva P , como única solución de la ecuación de Riccati.

El algoritmo de solución de este problema de optimización es como sigue:

1. Determinar el modelo matemático del sistema de ecuaciones lineales diferenciales en el espacio de estados,
2. Determinar la controlabilidad del modelo vectorial-matricial,
3. Aplicar el programa dado en para calcular las ganancias de realimentación de estados y de la integración, la cual es requerida para eliminar el error en estado estacionario asociado a la realimentación clásica de estados,
4. Correr el diagrama Simulink para el modelo.
5. Realizar el ajuste del regulador lineal cuadrático mediante la selección de los mejores valores de los elementos de las matrices Q y R
6. Determinar la mejor combinación de valores que proporcionen la satisfacción de los requerimientos de control.

3.2.1 Determinar el modelo matemático del sistema de ecuaciones lineales diferenciales en el espacio de estados.

Este modelo ya fue determinado con el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias dadas por (2.2) por las ecuaciones y se reproduce en aras de concentrar toda la información de forma didáctica:

$$\dot{x}_1(t) = -0.059x_1(t) + u_1(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -0.05x_2(t) + 0.5u_1(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = -0.047x_3(t) + u_2(t)$$

$$\dot{x}_4(t) = -0.069x_4(t) + u_2(t)$$

3.2.2 Determinar la controlabilidad del modelo vectorial matricial

El modelo vectorial matricial viene dado por las matrices (2.5), (2.6), (2.7) y (2.8). La controlabilidad completa del modelo puede ser determinada según (Ogata, 2010) verificando que la matriz

$$[B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B] \tag{3.2}$$

sea de rango completo o de otra forma si los n vectores que la conforman son linealmente independientes.

Para el caso cuando la entrada de control es un vector:

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{pmatrix} - r \text{ dimensional o } r \in M_{r \times 1}$$

Se exige que la misma matriz sea de rango completo, teniendo esta matriz n filas y nxr columnas. Esta matriz se denomina comúnmente matriz de controlabilidad y se denota como:

$$C = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad (3.3)$$

Para determinar la controlabilidad del modelo (2.2) se emplea la función de MATLAB®:

ctrb la cual debe tener en el argumento las matrices A y B.

Para el caso que nos ocupa:

con=ctrb(A, B)

la respuesta de MATLAB® es:

$$con = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.059 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & -0.025 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Como debe ser de rango completo, o sea de rango dos se determina el rango de () empleando la función rango de MATLAB®:

R=rank(con)

Y responde de la manera siguiente:

R=2

Finalmente se determina que el modelo es completamente controlable.

3.2.3 Aplicar el programa para calcular las ganancias de realimentación de estados y de la integración

El programa dado en e ha modificado para el caso que ocupa la presente tesis, y el mismo es dado a continuación.

```
% Calculo de las ganancias de realimentación de estados
% y de las ganancias de los integradores
% Arreglo para Tesis de Victor Baidal
clc, clear all
% Declaración del espacio de estados
A=[-0.059 0;0 -0.05];
B=[1 0;0 0.5];
C=[0.766 -0.9;0.066 -1.347];
```

```

D=[0 0;0 0];
Q=eye(2);
R=eye(2);
k=lqr(A,B,Q,R);% para comprobacion de la corrida
% Cálculo de las ganancias de realimentación integral
Aa=[A [0 0]' [0 0]';-C [0 0]' [0 0]'];% matriz ampliada para considerar
% la integracion de los errores
Ba=[B;zeros(2)];% matriz ampliada para el control
Qa=eye(4);% matriz Q ampliada
Ra=0.9*eye(2);% matriz R ampliada
ka=lqr(Aa,Ba,Qa,Ra);
k=ka(:,1:2)% matriz para realimentacion de estados
ki=ka(:,3:4)% matriz para adicionar la integración
% ===== fin del cálculo de las ganancias =====
% Después de correr este programa se llama
% al diagrama Simulink baidal_LQR.mdl
Este programa proporciona las matrices del tipo:

```

$$k = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$$k_i = \begin{bmatrix} k_{i11} & k_{i12} \\ k_{i21} & k_{i22} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Las matrices para las ganancias (3.5) y (3.6) serán aclaradas con posterioridad en tablas.

Cuando se corre este programa las matrices A, B, C, D, R, Q, k, ki, AA y BB permanecen vivas en el espacio de trabajo de MATLAB® de manera que el diagrama Simulink pueda usar sus valores.

3.2.4 Correr el diagrama Simulink

El diagrama Simulink diseñado para simular el control optimal del modelo (2.2) se muestra en la figura 3.1

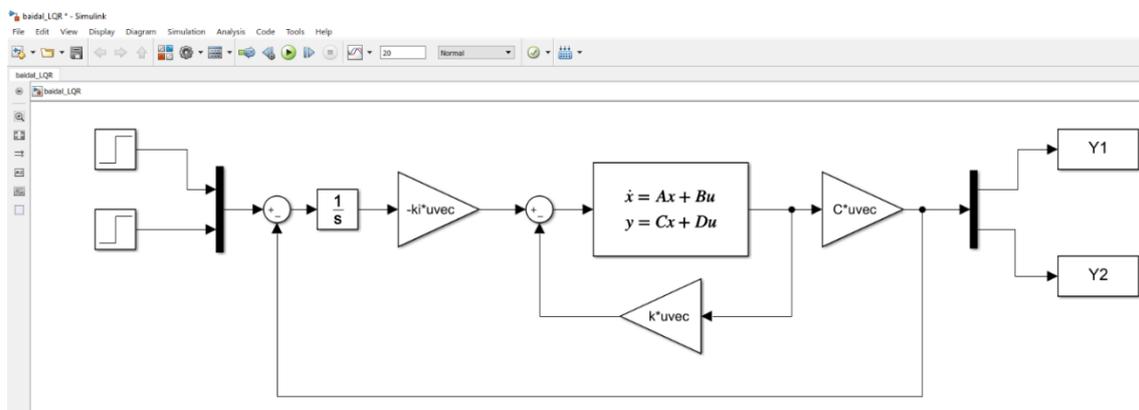
La composición de este diagrama es:

- Dos bloques Step que proporcionan las señales de entrada
- Un bloque multiplexor
- Un bloque sumador programado como restador
- Un bloque integrador
- Un bloque Gain programado para que procese entradas vectoriales y realice la multiplicación por la matriz de ganancias del integrador;
- Un bloque sumador programado como el anterior
- Un bloque que representa el espacio de estados y la salida

- Un bloque Gain que realiza la función de salida para obtener las salidas Y1 y Y2 $C \cdot \text{vec}$
- Otro bloque Gain para implementar la realimentación de los estados $k \cdot \text{vec}$
- Un bloque demultiplexor para separar la salida como vector en salidas escalares;
- Dos bloques To Workspace programados como arreglos para poder realizar las gráficas de interés.

Figura 3.1

Diagrama para simular el regulador lineal cuadrático



Para poder observar el resultado de la simulación inmediatamente que ella termine, se ha programado la función StopFcn en la ventana de diálogo Model Properties: baidal_LQR, como se muestra en la figura 3.2

En la figura 3.3 se muestran las respuestas en el dominio del tiempo Y1 y Y2 para ciertos valores de Q y R.

3.2.5 Realizar el ajuste del regulador lineal cuadrático mediante la selección de los mejores valores de los elementos de las matrices Q y R

Mediante la selección de los valores de las matrices Q_a y R_a se han realizado 18 experimentos. Estos se han ideado primero manteniendo la matriz R_a invariable y variando la matriz Q_a . El segundo experimento se ha realizado manteniendo constante la matriz Q_a y variando la matriz R_a .

En las figuras 3.4 y 3.5 se muestran los resultados de las combinaciones realizadas entre Qa y Ra.

Figura 3.2

Programación de los gráficos a observar al finalizar la simulación

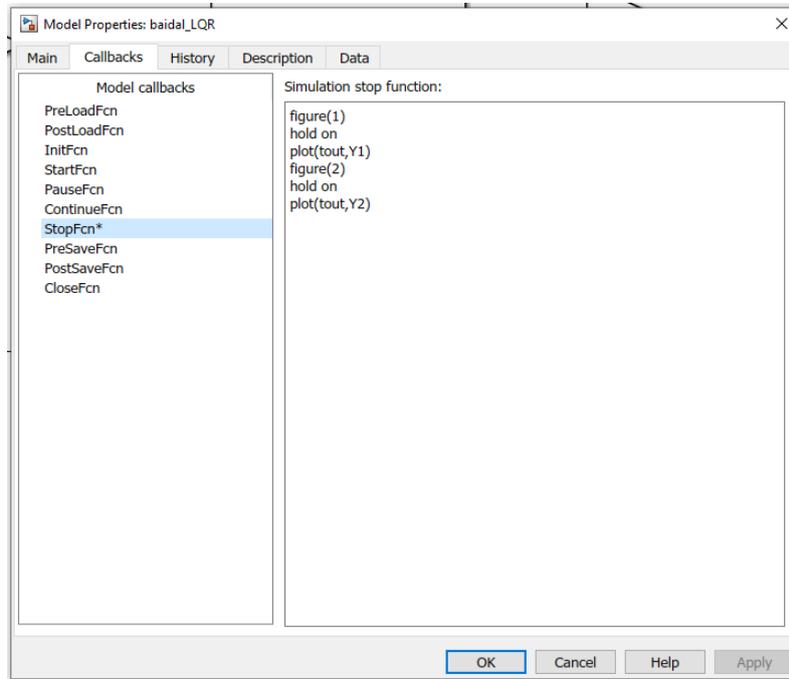
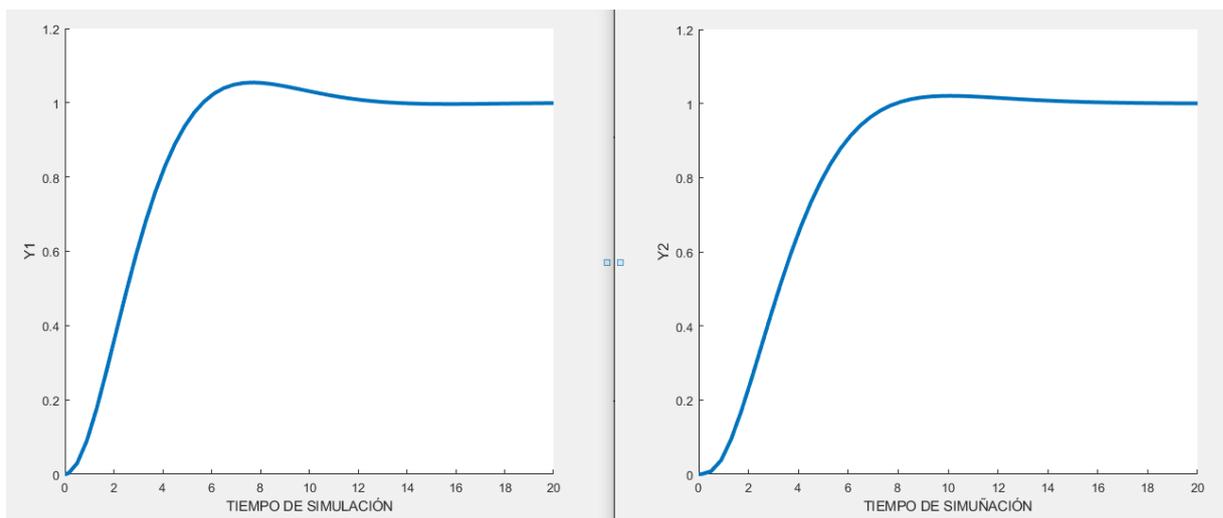


Figura 3.3

Respuestas del modelo con un regulador LQR.



En las figuras 3.4 y 3.5 se muestran los resultados de las combinaciones realizadas entre Qa y Ra.

Figura 3.4

Respuesta de la variable $Y1$ al paso escalón unitario con valor de $R_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

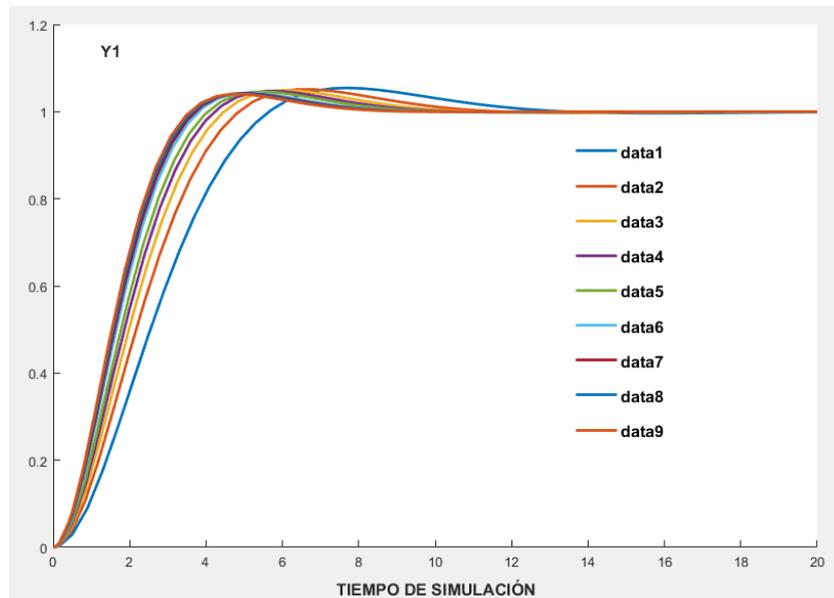
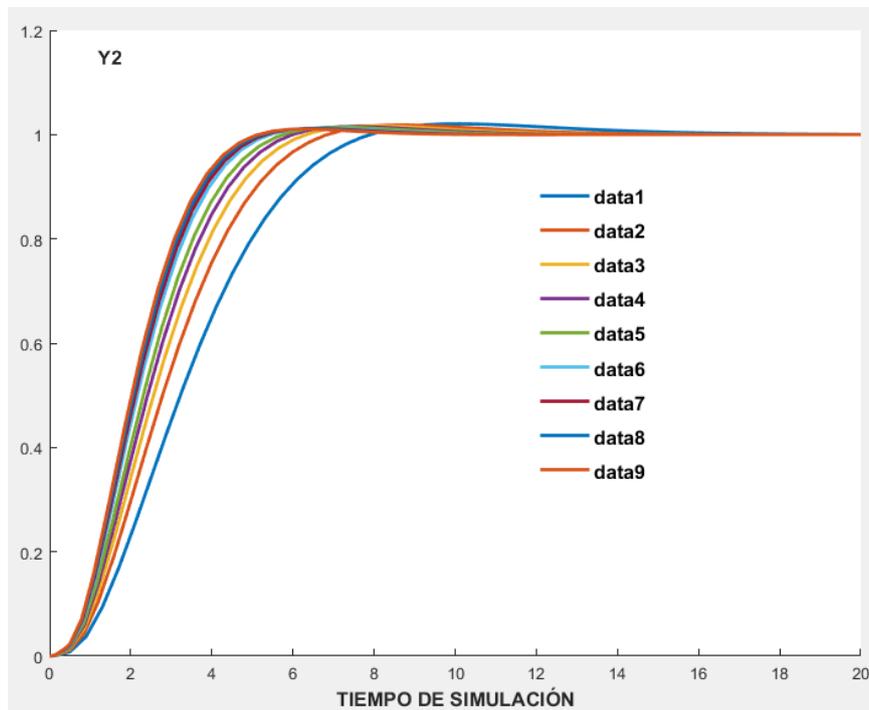


Figura 3.5

Respuesta de la variable $Y2$ al paso escalón unitario con valor de $R_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$



La correspondencia entre los datos y el par de valores de las matrices se proporciona a continuación:

Datos	Q_a	R_a
1	0.1	$R_a = I$
2	0.2	$R_a = I$
3	0.3	$R_a = I$
4	0.4	$R_a = I$
5	0.5	$R_a = I$
6	0.6	$R_a = I$
7	0.7	$R_a = I$
8	0.8	$R_a = I$
9	0.9	$R_a = I$

Tabla 3.1

Tabla de resultados del ajuste sistemático con la matriz Q_a manteniendo constante la matriz $R_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Q_a	k	k_i	Color de la línea
$= 0.1 * eye(4)$	$= \begin{pmatrix} 0.6797 & -0.2281 \\ -0.114 & 1.3163 \end{pmatrix}$	$= \begin{pmatrix} -0.304 & 0.0854 \\ 0.0854 & 0.304 \end{pmatrix}$	Azul
$= 0.2 * eye(4)$	$= \begin{pmatrix} 0.813 & -0.2648 \\ -0.1324 & 4.6025 \end{pmatrix}$	$= \begin{pmatrix} -0.4301 & 0.1226 \\ 0.0854 & 0.4301 \end{pmatrix}$	Marrón oscuro
$= 0.3 * eye(4)$	$= \begin{pmatrix} 0.9749 & -0.2879 \\ -0.144 & 1.7998 \end{pmatrix}$	$= \begin{pmatrix} -0.5263 & 0.1518 \\ 0.1518 & 0.5263 \end{pmatrix}$	Marrón claro
$= 0.4 * eye(4)$	$= \begin{pmatrix} 1.0756 & -0.3049 \\ -0.1525 & 1.9555 \end{pmatrix}$	$= \begin{pmatrix} -0.6073 & 0.1767 \\ 0.1767 & 0.6073 \end{pmatrix}$	Violeta
$= 0.5 * eye(4)$	$= \begin{pmatrix} 1.1622 & -0.3125 \\ -0.1592 & 2.0865 \end{pmatrix}$	$= \begin{pmatrix} -0.6785 & 0.1990 \\ 0.1990 & 0.6785 \end{pmatrix}$	Café claro
$= 0.6 * eye(4)$	$= \begin{pmatrix} 1.2393 & -0.3297 \\ -0.1648 & 2.2008 \end{pmatrix}$	$= \begin{pmatrix} -0.7429 & 0.2193 \\ 0.2193 & 0.7429 \end{pmatrix}$	Verde hierba
$= 0.7 * eye(4)$	$= \begin{pmatrix} 1.3092 & -0.3393 \\ -0.1696 & 2.3028 \end{pmatrix}$	$= \begin{pmatrix} -0.8021 & 0.2381 \\ 0.2381 & 0.8021 \end{pmatrix}$	Verde azul
$= 0.8 * eye(4)$	$= \begin{pmatrix} 1.3737 & -0.3476 \\ -0.1738 & 2.3955 \end{pmatrix}$	$= \begin{pmatrix} -0.8571 & 0.2557 \\ 0.2557 & 0.8571 \end{pmatrix}$	Marrón
$= 0.9 * eye(4)$	$= \begin{pmatrix} 1.4337 & -0.3591 \\ -0.1775 & 2.4808 \end{pmatrix}$	$= \begin{pmatrix} -0.9087 & 0.2724 \\ 0.2724 & 0.9087 \end{pmatrix}$	Azul marino

Tabla 3.2

Tabla de las normas y su relación en función de Q_a

Q_a	$\ k\ _2$	$\ k_i\ _2$	$\ k\ _2/\ k_i\ _2$
$= 0.1 * eye(4)$	1.361	0.3162	4.3038
$= 0.2 * eye(4)$	1.6536	0.4472	3.6975
$= 0.3 * eye(4)$	1.8547	0.5477	3.3863
$= 0.4 * eye(4)$	2.0133	0.6325	3.1834
$= 0.5 * eye(4)$	2.1465	0.7071	3.03
$= 0.6 * eye(4)$	2.2628	0.7746	2.921
$= 0.7 * eye(4)$	2.3662	0.8367	2.8281
$= 0.8 * eye(4)$	2.4602	0.8944	2.7506
$= 0.9 * eye(4)$	2.5467	0.9437	2.6844

Como se puede observar de las gráficas 3.4 y 3.5 al aumentar los valores de la diagonal de Q_a , manteniendo constante R_a como matriz identidad, el desempeño mejora siendo la respuesta más rápida y con una menor sobrerregulación en general.

De la Tabla 3.2 se aprecia que las normas de las matrices de las ganancias de realimentación k y k_i ($\|k\|_2, \|k_i\|_2$) aumentan con el aumento de los valores de sus elementos en la diagonal principal inversamente a lo que ocurre con la relación de sus normas, o sea: $\|k\|_2/\|k_i\|_2$

Para poder inferir alguna conclusión sobre esto se continua con el análisis similar, pero considerando que varía R_a manteniendo constante la matriz Q_a . Así, a continuación, se muestra el mismo análisis, pero variando el valor de R_a . En las figuras 3.6 y 3.7 se muestran los resultados de las combinaciones realizadas entre R_a y Q_a .

Figura 3.6

Respuesta de la variable $Y1$ al paso escalón unitario con valor de $Q_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

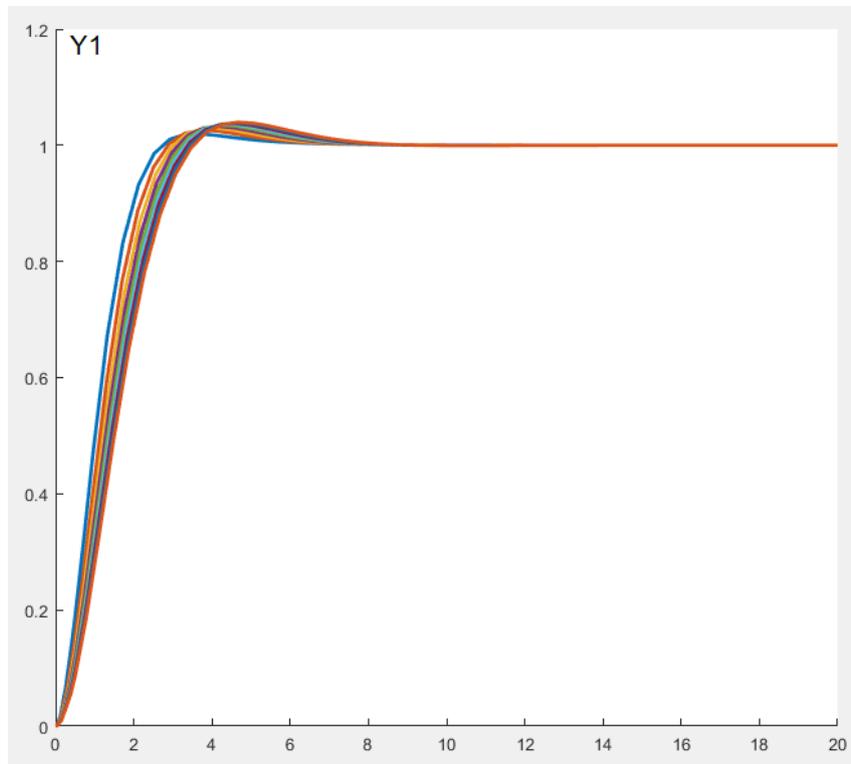
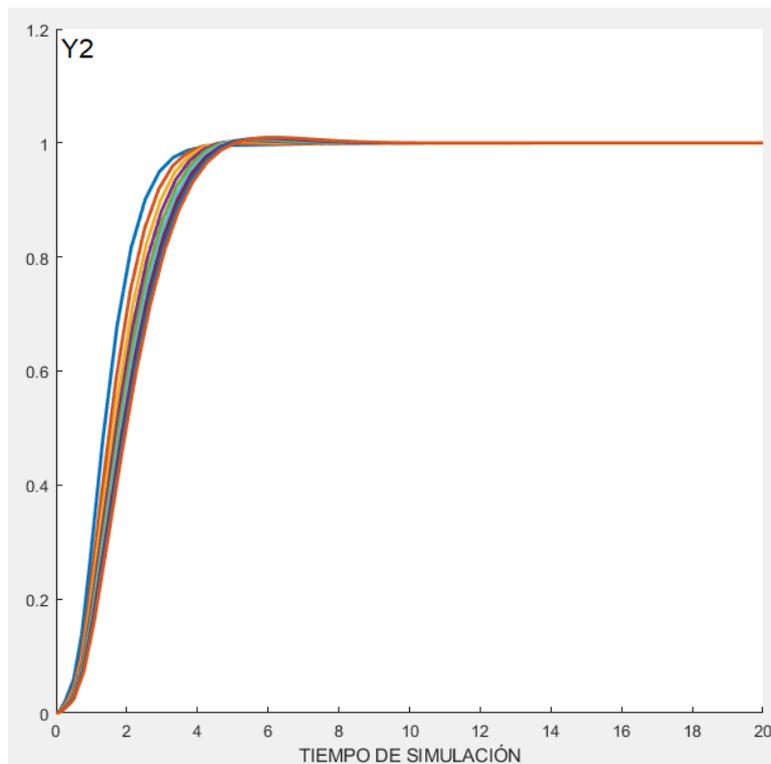


Figura 3.7

Respuesta de la variable $Y2$ al paso escalón unitario con valor de $Q_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$



La correspondencia entre los datos y el par de valores de las matrices se proporciona a continuación:

Datos	R_a	Q_a
1	0.1	$Q_a = I$
2	0.2	$Q_a = I$
3	0.3	$Q_a = I$
4	0.4	$Q_a = I$
5	0.5	$Q_a = I$
6	0.6	$Q_a = I$
7	0.7	$Q_a = I$
8	0.8	$Q_a = I$
9	0.9	$Q_a = I$

Tabla 3.3

Tabla de resultados del ajuste sistemático con la matriz R_a manteniendo constante la matriz $Q_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

R_a	k	k_i	Color de la línea
= 0.1 * $eye(4)$	$= \begin{pmatrix} 3.7361 & -0.5038 \\ -0.2519 & 5.3335 \end{pmatrix}$	$= \begin{pmatrix} -2.9994 & 1.0017 \\ 1.0017 & 2.994 \end{pmatrix}$	Azul
= 0.2 * $eye(4)$	$= \begin{pmatrix} 2.7903 & -0.4633 \\ -0.2317 & 4.2286 \end{pmatrix}$	$= \begin{pmatrix} -2.1276 & 0.688 \\ 0.688 & 2.1276 \end{pmatrix}$	Café claro
= 0.3 * $eye(4)$	$= \begin{pmatrix} 2.3663 & -0.4383 \\ -0.2192 & 3.7099 \end{pmatrix}$	$= \begin{pmatrix} -1,7402 & 0.5522 \\ 0.5522 & 1,7402 \end{pmatrix}$	Mostaza
= 0.4 * $eye(4)$	$= \begin{pmatrix} 2.1109 & -0.4202 \\ -0.2101 & 3.3877 \end{pmatrix}$	$= \begin{pmatrix} -1.5089 & 0.4725 \\ 0.4725 & 1.5089 \end{pmatrix}$	Magenta
= 0.5 * $eye(4)$	$= \begin{pmatrix} 1.9351 & -0.4060 \\ -0.2030 & 3.1605 \end{pmatrix}$	$= \begin{pmatrix} -1.3508 & 0.4187 \\ 0.4187 & 1.3508 \end{pmatrix}$	Verde claro
= 0.6 * $eye(4)$	$= \begin{pmatrix} 1.8042 & -0.3944 \\ -0.1972 & 2.9880 \end{pmatrix}$	$= \begin{pmatrix} -1.2340 & 0.3795 \\ 0.3795 & 1.2340 \end{pmatrix}$	Azul marino
= 0.7 * $eye(4)$	$= \begin{pmatrix} 1.7017 & -0.3845 \\ -0.1922 & 2.8507 \end{pmatrix}$	$= \begin{pmatrix} -1.1431 & 0.3492 \\ 0.3492 & 1.1431 \end{pmatrix}$	No definido
= 0.8 * $eye(4)$	$= \begin{pmatrix} 1.6185 & -0.3760 \\ -0.1880 & 2.7377 \end{pmatrix}$	$= \begin{pmatrix} -1.0698 & 0.3250 \\ 0.3250 & 1.0698 \end{pmatrix}$	No definido
= 0.9 * $eye(4)$	$= \begin{pmatrix} 1.5492 & -0.3684 \\ -0.1842 & 2.6422 \end{pmatrix}$	$= \begin{pmatrix} -1.0090 & 0.3050 \\ 0.3050 & 1.0090 \end{pmatrix}$	No definido

Tabla 3.4

Tabla de las normas y su relación en función de Q_a

R_a	$\ k\ _2$	$\ k_i\ _2$	$\ k\ _2/\ k_i\ _2$
$= 0.1 * eye(4)$	5.4201	3.1623	1.714
$= 0.2 * eye(4)$	4.3099	2.2391	1.9275
$= 0.3 * eye(4)$	3.7880	1.8257	2.0748
$= 0.4 * eye(4)$	3.4633	1.5811	2.1904
$= 0.5 * eye(4)$	3.234	1.4142	2.2868
$= 0.6 * eye(4)$	3.0598	1.291	2.3701
$= 0.7 * eye(4)$	2.9211	1.1952	2.4439
$= 0.8 * eye(4)$	2.8067	1.118	2.5104
$= 0.9 * eye(4)$	2.7101	1.0541	2.5711

Como se puede observar de las gráficas 3.6 y 3.7 al aumentar los valores de la diagonal de R_a , manteniendo constante Q_a como matriz identidad, el desempeño empeora siendo la respuesta más lenta y con una mayor sobre regulación en general.

De la Tabla 3.4 se aprecia que las normas de las matrices de las ganancias de realimentación k y k_i ($\|k\|_2, \|k_i\|_2$) aumentan con el aumento de los valores de sus elementos en la diagonal principal inversamente a lo que ocurre con la relación de sus normas, o sea: $\|k\|_2/\|k_i\|_2$

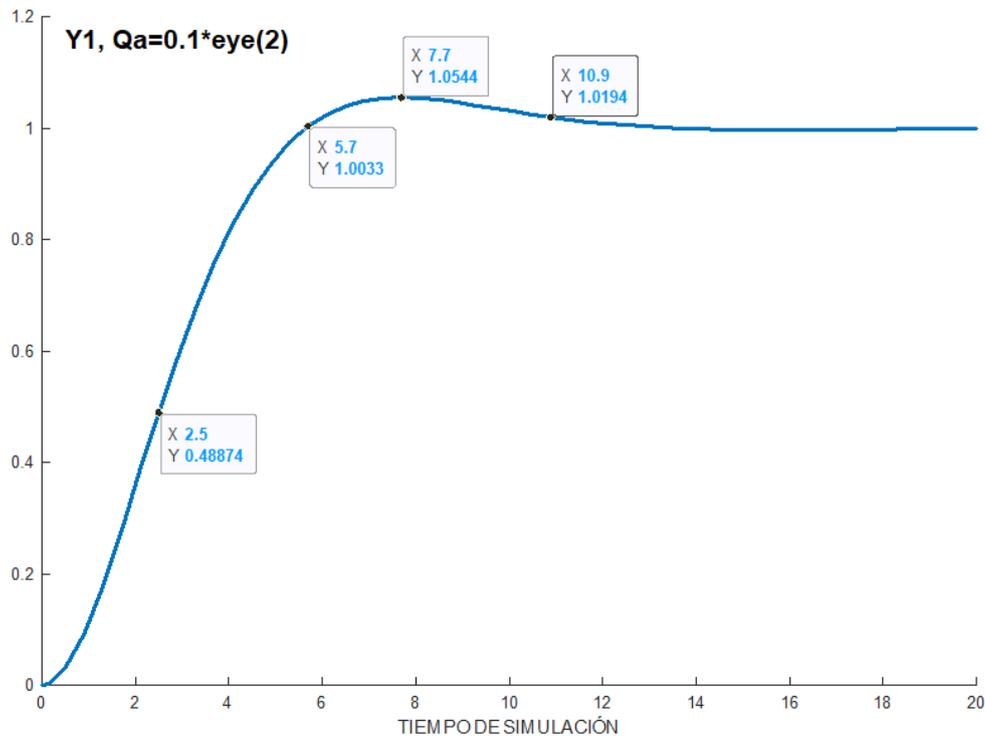
En las figuras que siguen se muestran las respuestas obtenidas para diferentes valores y combinaciones de las matrices Q_a y R_a .

En la figura 3.8 se observa que con R_a una matriz identidad y un valor pequeño de Q_a el valor de la sobre regulación es de $M_p = 5\%$ y se obtiene a las 7.7

unidades de tiempo. De igual manera la respuesta cruza el valor $U_{fin}=1$ a los 5.7 unidades de tiempo.

Figura 3.8

Respuesta obtenida para Y_1 con $Q_a = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$ y $R_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$



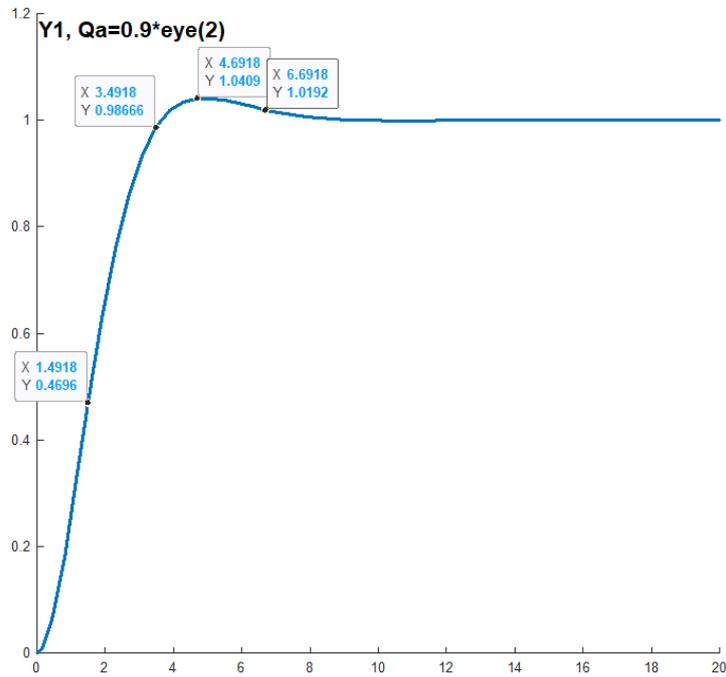
En la figura 3.9 se observa la respuesta para la misma variable Y_1 pero los valores de las matrices son $Q_a = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}$, manteniendo invariable el valor para R_a .

En comparación con el caso anterior, el valor de la sobre regulación es de $M_p = 4\%$ y se obtiene a las $t_p = 1.04$ unidades de tiempo. De igual manera la respuesta cruza el valor de establecimiento a los $t_{est} = 3.5$ unidades de tiempo aproximadamente.

Luego podemos afirmar que, para esta variable, Y_1 , se ha alcanzado un valor óptimo al reducir los parámetros que permiten evaluar el desempeño del modelo.

Figura 3.9

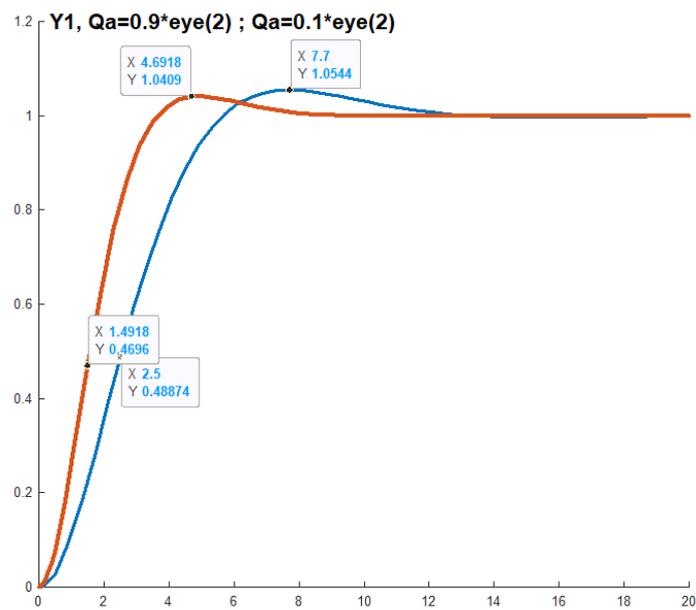
Respuesta obtenida para Y1 con $Q_a = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}$ y $R_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$



En la figura 3.10 se muestra de manera evidente la mejora en el desempeño del sistema, para la variable Y1, al variar la matriz Q_a .

Figura 3.10

Relación entre las respuestas obtenidas para Y1 con $R_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$



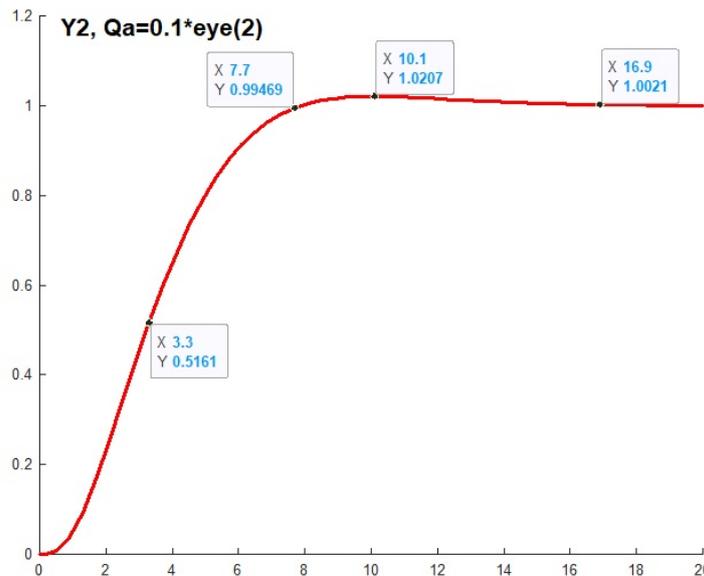
En la figura 3.11 se muestra la respuesta obtenida para la variable Y2 cuando

$$Q_a = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

De igual manera se ha mantenido el valor de Ra como matriz identidad.

Figura 3.11

Respuesta obtenida para Y2 con $Q_a = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$ y $R_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$



Los valores que permitirán evaluar el desempeño relativo para dos valores de Qa se encuentran medidos en la misma figura 3.11.

El valor del tiempo requerido para alcanzar el valor medio de la respuesta ($Y_2=0.5$ unidades) es de $t_d = 3.3$ unidades de tiempo. El valor requerido de tiempo de la respuesta para cruzar el valor de establecimiento es de $t_r = 8.1$ unidades de tiempo, la misma se establece a las $t_s = 20$ unidades de tiempo.

En la figura 3.12 se muestra la respuesta para un nuevo valor de Qa, en este caso un valor mayor. Es evidente la mejoría del desempeño. Las mediciones realizadas sobre la respuesta proporcionan los siguientes datos:

$$t_d =$$

$$t_r = 5.49 \text{ unidades de tiempo (en lo adelante ut)}$$

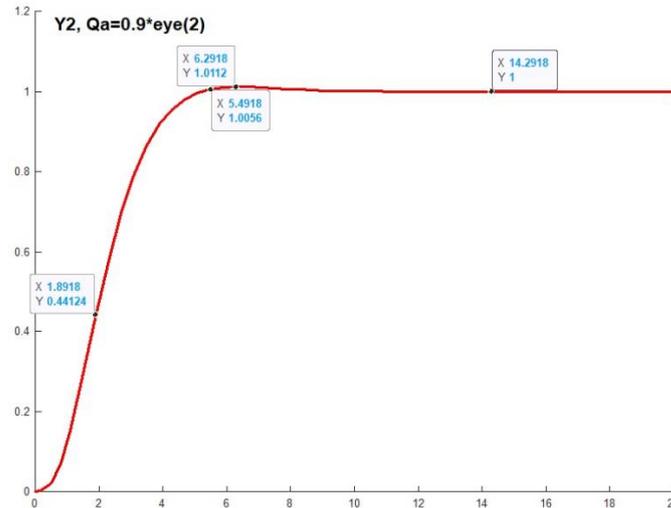
$$t_s = 14.29 \text{ ut}$$

$$M_p = 1.12\%$$

Estos valores evidencian la mejora sustancial cuando la matriz Q_a es mayor considerando constante los valores de R_a .

Figura 3.12

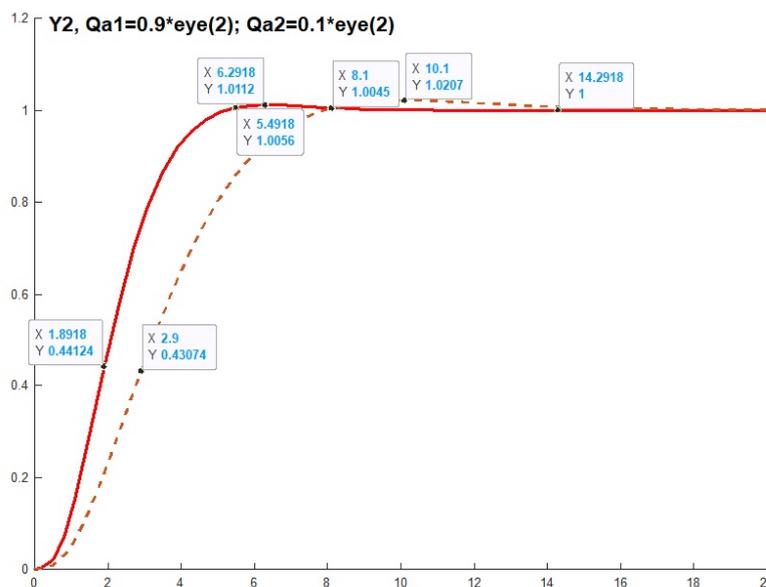
Respuesta obtenida para $Y2$ con $Q_a = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}$ y $R_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$



Esto queda confirmado si se observa detenidamente ambos comportamientos para $Q_a = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}$ y para $Q_a = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$ mostrados en la figura 3.13

Figura 3.13

Relación entre las respuestas obtenidas para $Y2$ con $R_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$



En lo adelante, se realiza un nuevo experimento “insilico”, donde se varió el valor de la matriz, R_a dejando constante la matriz Q_a e igual a la matriz identidad.

En la figura 3.14 se muestra la repuesta del modelo controlado mediante la técnica de control optimal. Las mediciones pertinentes se han realizado sobre la misma respuesta en la figura.

$$t_d =$$

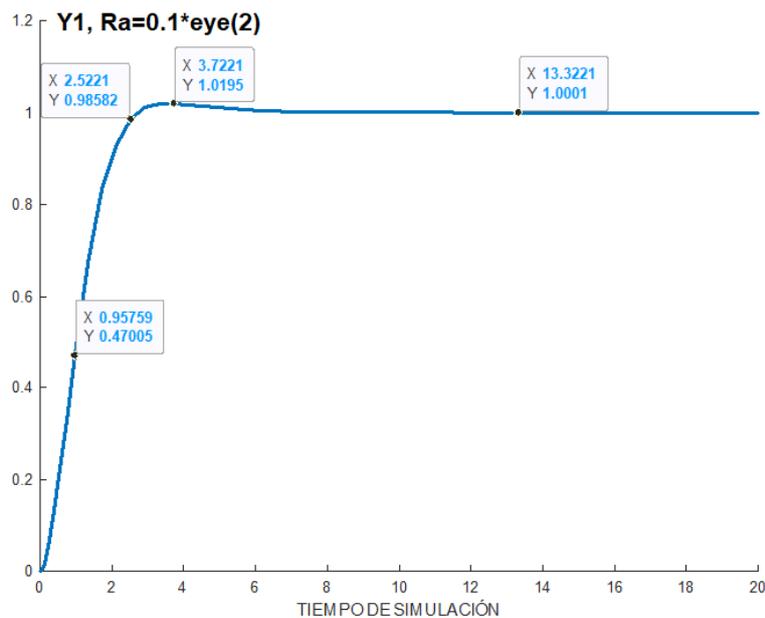
$$t_r = 2.9 \text{ unidades de tiempo (en lo adelante ut)}$$

$$t_s = 13.7 \text{ ut}$$

$$M_p = 1.95\%$$

Figura 3.14

Respuesta obtenida para $Y1$ con $R_a = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$ y $Q_a = I$



En la figura 3.15 se tiene la respuesta obtenida para $Y1$ con $R_a = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}$ y $Q_a = I$, de igual manera se tienen las mediciones sobre la curva de respuesta.

$$t_d = 1.46 \text{ ut}$$

$$t_r = 2.9 \text{ unidades de tiempo (en lo adelante ut)}$$

$$t_s = 15.46 \text{ ut}$$

$$M_p = 3.98\%$$

Figura 3.15 Respuesta obtenida para Y1 con $R_a = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}$ y $Q_a = I$

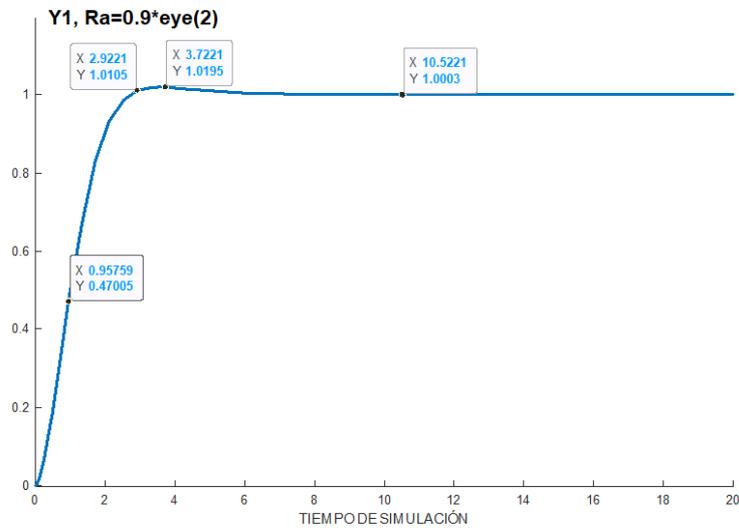
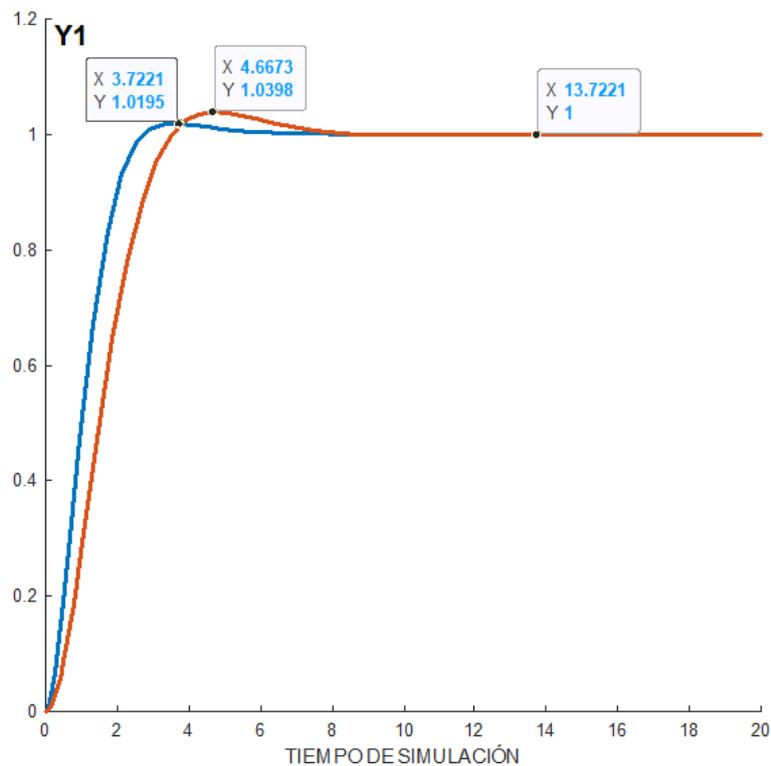


Figura 3.16

Relación entre las respuestas obtenida para Y1 con $R_a = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$ y $R_a = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}$ con $Q_a = I$



En la figura 3.17 se muestra la respuesta Y2 del sistema óptimamente regulado para el caso cuando $R_a = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}$ con $Q_a = I$.

Figura 3.17

Respuesta obtenida para Y2 con $R_a = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$ y $Q_a = I$

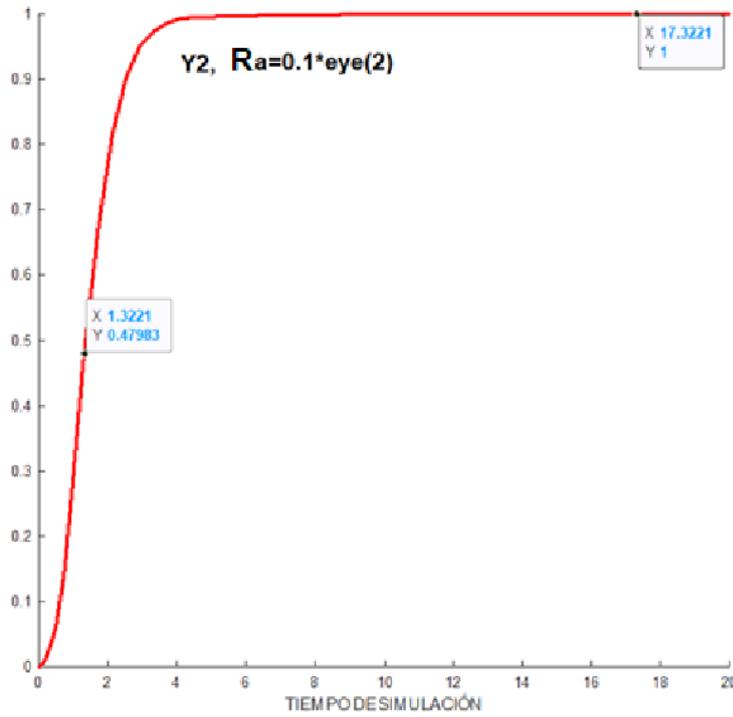


Figura 3.18

Respuesta obtenida para Y2 con $R_a = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}$ y $Q_a = I$

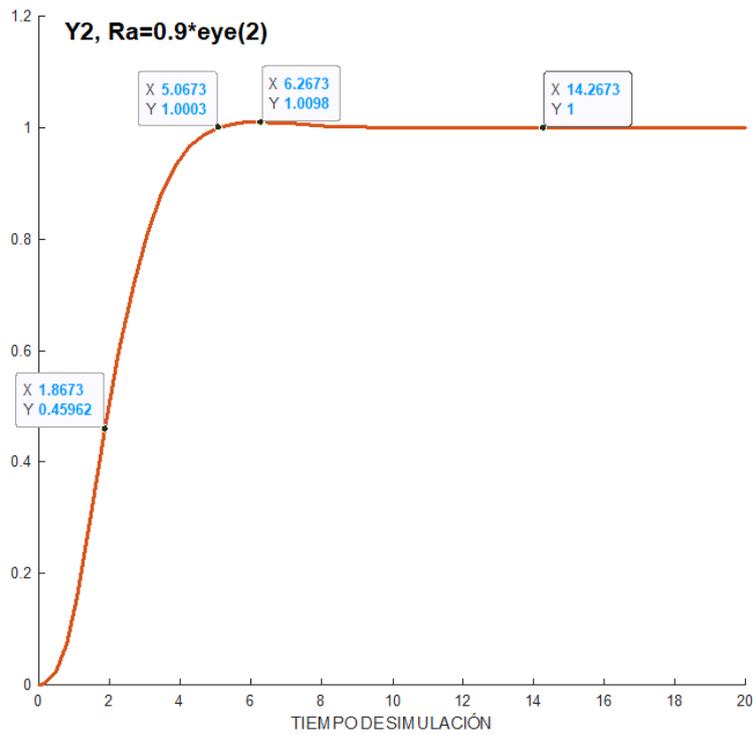
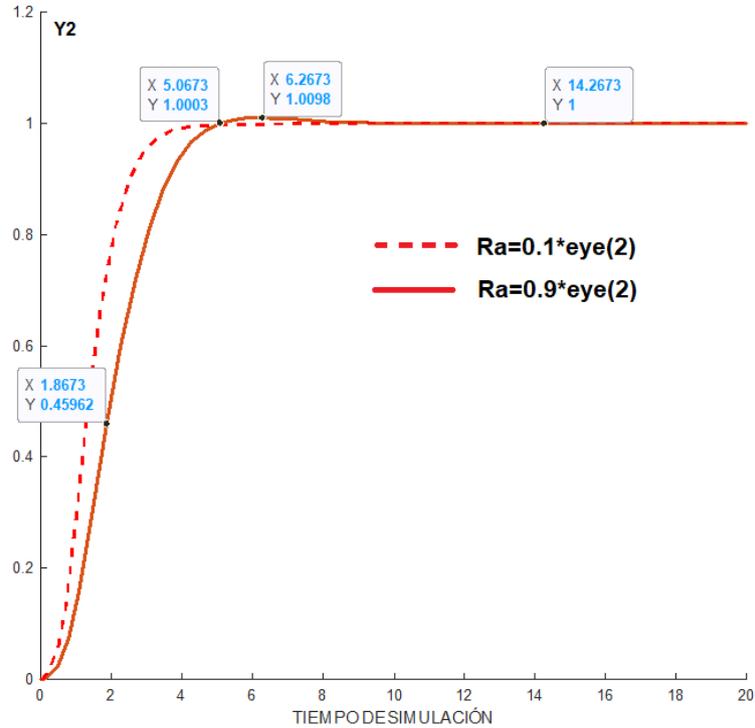


Figura 3.19

Relación entre las respuestas Y_2 obtenidas con $R_a = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$ y $R_a = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}$ $Q_a = I$



Esta figura es la base de la comparación visual y prácticamente determina la mejor selección de regulación. Resumiendo, las conclusiones para el control optimal son:

Tabla 3.5

Resumen de los experimentos por simulación con $R_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$R_a = I$	$Q_a = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$		$Q_a = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}$	
	Y_1	Y_2	Y_1	Y_2
t_d	2.5 [ut]	3.3 [ut]	1.49 [ut]	1.89 [ut]
t_r	5.7 [ut]	7.7 [ut]	3.49 [ut]	5.49 [ut]
t_p	7.7 [ut]	10.5 [ut]	4.69 [ut]	6.29 [ut]
t_s	10.9 [ut]	16.9 [ut]	6.69 [ut]	14.29 [ut]
$M_p\%$	5.44%	2.07%	4.09%	1.12%

Tabla 3.6

Resumen de los experimentos por simulación con $Q_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$Q_a = I$	$R_a = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$		$R_a = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}$	
	Y_1	Y_2	Y_1	Y_2
t_d	0.957 [ut]	1.32 [ut]	0.957 [ut]	1.86 [ut]
t_r	2.52 [ut]	17.32 [ut]	2.92 [ut]	5.06 [ut]
t_p	3.72 [ut]	0 [ut]	3.72 [ut]	6.26 [ut]
t_s	13.3 [ut]	17.32 [ut]	10.5 [ut]	14.26 [ut]
$M_p\%$	1.95%	0%	1.95%	0.98%

Como se observa, de las tablas 3.5 y 3.6 hay una tendencia a la optimización cuando $R_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $Q_a = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}$ o cuando $R_a = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}$ y $Q_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ya que en esos casos es evidente la satisfacción de las exigencias de diseño.

Para poder discriminar adecuadamente se propone emplear la norma de Frobenius. Esta norma es adecuada para evaluar la distancia de una matriz rectangular respecto del origen del espacio vectorial de matrices rectangulares.

Un espacio vectorial (Lay, Álgebra lineal y sus aplicaciones, 2007) es un conjunto no vacío V de objetos, llamados vectores, en el que están definidas dos operaciones, llamadas suma y multiplicación por escalares (números reales), sujetas a diez axiomas (o reglas). Estos axiomas deben ser válidos para todos los vectores u, v y w en V y todos los escalares c y d . El cuarto axioma establece la existencia obligatoria de un vector cero.

Así, se calcula la norma de Frobenius para determinar que selección estará más cerca del mínimo o mínima distancia.

La norma de Frobenius establece que su cálculo obedece a la expresión:

$$N_F = \|M\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_{ij}^2}$$

Las matrices de interés son:

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1.49 & 1.89 \\ 3.49 & 5.49 \\ 4.69 & 6.29 \\ 6.69 & 14.29 \\ 0.049 & 0.0112 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

La norma de esta matriz será:

$$\|H_1\|_F = \sqrt{1.49^2 + 3.49^2 + 4.69^2 + 6.69^2 + 0.049^2 + 1.89^2 + 5.49^2 + 6.29^2 + 14.29^2 + 0.0112^2}$$

$$\|H_1\|_F = 18.9377 \quad (3.8)$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 0.957 & 1.86 \\ 2.92 & 5.06 \\ 3.72 & 6.26 \\ 10.5 & 14.26 \\ 0.0195 & 0.0098 \end{bmatrix}$$

$$\|H_2\|_F = \sqrt{0.957^2 + 2.92^2 + 3.72^2 + 10.5^2 + 0.0195^2 + 1.86^2 + 5.06^2 + 6.26^2 + 14.26^2 + 0.0098^2}$$

$$\|H_2\|_F = 20.1278 \quad (3.9)$$

Los cálculos han sido realizados con el scrip siguiente:

% cálculo de la norma de Frobenius

clc

clear all

v1=[1.49 3.49 4.69 6.69 0.049; 1.89 5.49 6.29 14.29 0.0112];

F_v1=v1';

v2=[0.957 2.92 3.72 10.5 0.0195; 1.86 5.06 6.26 14.26 0.0098];

F_v2=v2';

Fro_1=norm(F_v1,"fro")

Fro_2=norm(F_v2,"fro")

Según 3.7 y 3.8 se elige $R_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ con $Q_a = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}$ como mejor ajuste del controlador óptimo.

Finalmente se ha obtenido el controlador optimal para un modelo de un proceso dinámico complejo a partir del método de cálculo variacional con un funcional cuadrático.

Se ha identificado las características algebraicas a partir de las matrices polinómicas (2.1), la interacción ha sido evaluada determinándose que la existencia de funciones transferenciales en la diagonal secundaria proporciona una fuerte relación entre los lazos de control.

Se realizó una comparación de los diferentes desempeños con varias combinaciones posibles de los valores de las matrices Q_a y R_a .

El mejor resultado obtenido ha sido aplicado en el modelo de una columna de destilación binaria.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

CONCLUSIONES

Las características algebraicas de los modelos n-dimensionales controlables, observables y estabilizables mediante la formulación de matrices polinómicas para definir la dinámica de los procesos modelados han sido identificadas.

El grado de interrelación entre las variables a observar en el modelo matemático ha sido determinado evaluando el grado de las interacciones entre las variables.

Los resultados obtenidos con los métodos de control optimal del cálculo variacional en modelos n-dimensionales han sido comparados entre sí.

El mejor resultado de optimización fue aplicado en un ejemplo de modelo matemático de columna de destilación.

RECOMENDACIONES

Propuestas a considerar

1. Continuar la investigación sobre el control optimal aplicado a modelos matemáticos complejos con múltiples entradas y salidas, con el fin de generalizar los resultados obtenidos,
2. Desarrollar algoritmos computacionales mediante computación metaheurística y bio-inspiradas de manera que el control optimal se convierta en un control optimal adaptivo.

Referencias bibliográficas.

- Camacho, A., & Carvajal, R. (2021). *Diseño del controlador predictivo multivariable para el control de una columna de destilación*. Guayaquil: ESPOL.
- Cameron, I. T., Ruiz, C. A., & Gani, R. (1986). A Generalized Model for Distillation Columns-II. Numerical and Computational Aspects. *Computers & Chemical Engineering*, 10(3), 199-211.
- Clarke, F. (2005). The maximum principle in optimal control. *J. Cybernetics and Control*, 709-722.
- Gani, R., Ruiz, C. A., & Cameron, I. T. (1986). A Generalized Model for Distillation Columns-I. Model Description and Applications. *Computers & Chemical Engineering*, 10(3), 181-198.
- Kalman, R. E. (1960). A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. *Journal of Basic Engineering*(82), 35-45.
- Kautsky, J., Nichols, and P. Van Dooren, N. K., & Van Doren, P. (1985). Robust Pole Assignment in Linear State Feedback. *International Journal of Control*, 41, 1129-1155.
- Lay, D. C. (2007). *Álgebra lineal y sus aplicaciones* (Tercera ed.). (P. Education, Ed.) México.
- Martin-Sanchez, J. M., & Shah, S. L. (1984). Multivariable Adaptive Predictive Control of a Binary Distillation Column. *Automatica*, 20(5), 607-620.
- Ogata, K. (2010). *Modern Control Engineering 5th Edition*. Prentice Hall.
- Palacios Zambrano, V. E., & Franco García, F. G. (2020). *Diseño del controlador predictivo multivariable para el control de la temperatura y la velocidad en una extrusora de polímeros*. Tesis Maestría ESPOL. ESPOL, FIEC. Guayaquil, Ecuador: MACI. Recuperado el 3 de mayo de 2022
- Palacios, V. E., & Zambrano, F. G. (2020). *Diseño del controlador predictivo multivariable para el control de la temperatura y la velocidad en una extrusora de polímeros*. MACI FIEC ESPOL, Guayaquil.
- Reyes Bacardí, A. (marzo de 2019). Programación y Algoritmos. Manual de estudio de MATLAB. *Maestría de Matemática Mención Modelación Matemática*. Milagro, Guayas, Ecuador.
- Rijnsdorp, J. E. (1965). Interaction in two-variable control distillation columns. *Theory. Automatica*, Vol, 1, pp. 15-28.
- Rijnsdorp, J. E. (1965). Interaction in two-variable control distillation columns. II. Application Of Theory. (P. Press, Ed.) *Automatica*, Vol, 1, pp. 29-52.

- Ruiz, , C. A., Cameron, I. T., & Gani. , R. (1988). A Generalized Model for Distillation Columns-III. Study of Startup Operations. *Computers & Chemical Engineering*, 12(1), 1-14.
- Skogestad, , S., & Postlethwaite, I. (2001). *Multivariable Feedback Control. Analysis & Design* (Second ed.). John Wiley & Sons.
- Terra, , M. H., Cerri,, J. P., & Ishihara, J. Y. (2014). Optimal Robust Linear Quadratic Regulator for Systems Subject to Uncertainties. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 9(59), 2586-2591.
- Wood , R. D., & Berry. , M. W. (1973,). Terminal composition control of a binary distillation column. (.. P. Britain, Ed.) *Chemical Engineering Science,,* 28, 1707-1717.
- Wood , R. K., & Pacey, W. C. (1972). Experimental evaluation of feedback feedforward and combined feedforward-feedback binary distillation column control. *Can. J. chem. Engng*(50), 376-384.

ANEXOS

Programa baidal_1.m

```
% Programa para obtener la transformación de la matriz de
% funciones de transferencia a sistema de ecuaciones
% diferenciales ordinarias
clc
clear all
H=[tf(12.8,[16.7 1]), tf(-18.9,[21 1]);tf(6.6,[19.9 1]) tf(-19.4,[14.4 1])];
sist=ss(H)
AA=sist.A;
BB=sist.B;
CC=sist.C;
DD=sist.D;
size(sist)%
sist2=ss(sist,'min')
```

Proporciona la siguiente respuesta

```
sist =
A =      x1      x2      x3      x4
x1 -0.05988      0      0      0
x2      0    -0.05025      0      0
x3      0      0    -0.04762      0
x4      0      0      0    -0.06944
```

```
B =  u1  u2
x1  1  0
x2 0.5 0
x3  0  1
x4  0  1
```

```
C =      x1      x2      x3      x4
y1  0.7665      0    -0.9      0
y2      0    0.6633      0    -1.347
```

```
D =  u1  u2
y1  0  0
y2  0  0
```

Continuous-time state-space model.
State-space model with 2 outputs, 2 inputs, and 4 states.

sist2 =

A =	x1	x2	x3	x4
x1	-0.05988	0	0	0
x2	0	-0.05025	0	0
x3	0	0	-0.04762	0
x4	0	0	0	-0.06944

B =

	u1	u2
x1	1	0
x2	0.5	0
x3	0	1
x4	0	1

C =

	x1	x2	x3	x4
y1	0.7665	0	-0.9	0
y2	0	0.6633	0	-1.347

D =

	u1	u2
y1	0	0
y2	0	0

Continuous-time state-space model.